СПОСОБЪ НАИМЕНЬШИХЪ КВАДРАТОВЪ

ДИССЕРТАЦІЯ

НА СТЕПЕНЬ МАГИСТРА МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

КАНДИДАТА ЦИНГЕРА.

МОСКВА.

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1862.

Печатать позволяется,

по опредѣленію Физико-Математическаго факультета. Москва, Февраля 7-го 1862 года.

Деканъ, Дѣйствительный Статскій Совѣтникъ Г. Щуровскій.



СПОСОБЪ НАИМЕНЬШИХЪ КВАДРАТОВЪ.

ВВЕДЕНІЕ.

Изысканіе вѣроятнѣйшихъ выводовъ изъ наблюденій есть безъ сомнѣнія одинъ изъ самыхъ важныхъ вопросовъ, входящихъ въ область Теоріи Вѣроятностей. Вопросы подобнаго рода рѣдко представляются въ такомъ простомъ и ясномъ видѣ, чтобы можно было для нихъ найти вполнѣ удовлетворительное рѣшеніе; въ большей части случаевъ возможно только рѣшеніе приближенное и до извѣстной степени произвольное. Причина этого заключается главнымъ образомъ въ особенномъ характерѣ самаго понятія о случайности явленій, понятія по существу своему не строго опредѣленнаго, рѣзко отличающаго Теорію Вѣроятностей отъ другихъ математическихъ наукъ. Понятно, что при такихъ условіяхъ должно обращать очень большое вниманіе на тѣ границы, въ которыхъ остаются справедливыми заключенія, выводимыя изъ теоретическихъ указаній; особенно если дѣло идетъ о вопросахъ, имѣющихъ важное практическое примѣненіе.

Около шестидесяти лѣтъ тому назадъ Гауссомъ и Лежандромъ былъ предложенъ для сочетанія многочисленныхъ наблюденій способъ наименьшихъ квадратовъ; съ тѣхъ поръ онъ вошелъ во всеобщее употребленіе и безъ сомнѣнія принесъ опытнымъ наукамъ великую пользу. Что касается до практической стороны этого способа, то ему нельзя не отдать рѣшительнаго преимущества, потому что едва ли возможенъ другой столь же простой и столь же общій пріемъ для рѣшенія многочисленныхъ условныхъ уравненій. Теорія показала, что этотъ способъ, предложенный сначала какъ чисто практическій пріемъ, для того, чтобы устранить неопредѣленность при сочетаніи многочисленныхъ наблюденій, даетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно съ извѣстными условіями, самые выгодные результаты. Это заключеніе по свойству вопроса не можетъ имѣть абсолютнаго значенія и потому весьма важно опредѣлить, въ какой мѣрѣ оно можетъ быть справедливо. Гауссъ и Лапласъ являются представителями двухъ совершенно различныхъ мнѣній о значеніи способа наименьшихъ квадратовъ. У Лапласа находимъ строгое и безпристрастное изслѣдованіе этого вопроса; изъ его анализа видно, что результаты способа наименьшихъ квадратовъ получаютъ болѣе или менѣе значительную вѣроятность, только при условіи большаго числа наблюденій; между тѣмъ какъ Гауссъ старался на основаніи постороннихъ соображеній придать этому способу безусловное значеніе. Если мы обратимъ вниманіе на то, что въ законѣ большихъ чиселъ заключается вся сущность Теоріи случаевъ и что только при большомъ числѣ испытаній получаютъ дѣйствительное, фактическое значеніе всѣ свойства случайныхъ явленій, то не трудно будетъ видѣть справедливость Лапласова вывода: при ограниченномъ же числѣ наблюденій мы вовсе не можемъ расчитывать на взаимное уничтоженіе погрѣшностей и само собою понятно,

что всякое сочетаніе наблюденій можетъ въ такомъ случаѣ повести столько же къ увеличенію погрѣшностей, сколько и къ ослабленію ихъ.

Одну изъ самыхъ главныхъ задачъ Теоріи наивыгоднѣйшаго сочетанія наблюденій составляетъ опредѣленіе степени точности полученныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ результатовъ. Въ общепринятой теоріи этотъ вопросъ разрѣшается правильно только въ томъ случаѣ, когда наблюденія служатъ для опредѣленія одной неизвѣстной величины; въ случаѣ же многихъ неизвѣстныхъ способы, употребляемые для изысканія вѣроятныхъ ошибокъ выводовъ, приводятъ къ весьма неправильнымъ результатамъ. Этотъ чрезвычайно важный недостатокъ былъ замѣченъ въ первый разъ и совершенно устраненъ Бьенеме 1). Къ счастію опущеніе изъ виду этого обстоятельства не имѣло вліянія на изысканіе наивыгоднѣйшихъ результатовъ и ихъ вѣсовъ; ошибка оказывается только при переходѣ отъ вѣса къ вѣроятной погрѣшности; уже при двухъ неизвѣстныхъ предѣлы вѣроятныхъ погрѣшностей должны быть почти вдвое болѣе обыкновенно принимаемыхъ; такъ что обыкновенный до сихъ поръ способъ исчисленія приводитъ къ весьма ложнымъ представленіямъ о степени точности выводовъ. Открытіе и устраненіе этого недостатка принадлежитъ безъ сомнѣнія къ весьма важнымъ явленіямъ современной науки.

Въ этомъ сочиненіи я старался показать, что степень довѣрія къ результатамъ способа наименьшихъ квадратовъ во всякомъ случаѣ условливается числомъ наблюденій, на какихъ бы соображеніяхъ не основывалось доказательство этого способа; при опредѣленіи предѣловъ вѣроятныхъ погрѣшностей въ случаѣ уравненій со многими неизвѣстными я ввелъ поправку, указанную Біенеме и старался показать всю важность ея. Въ послѣдней главѣ помѣщено рѣшеніе числоваго примѣра, именно опредѣленіе элементовъ кометы Донати 1858 года. Матеріалами, кромѣ классическихъ сочиненій Гаусса 2) и Лапласа 3) и вышеозначеннаго мемуара Бьенеме, служили мнѣ сочиненія Энке 4) Риттера 5) Дингера 6) Савича 7) Биве 8) и др.

---

1) Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Liouville, T. XVII, année 1852. «Memoire de M. Bienaymé sur la probabilité des erreurs d'aprés la méthode des moindres carrés.»

2) Théorie analytique des probabilités, par Laplace.

3) Méthode des moindres carrés par Gauss; Memoires traduits et publiés par Bertrand 1855.

4) Astronomisches Jahrbuch für 1834, 1835 und 1836 J. Ueber die Methode der kleinsten Quadrate. von Encke.

5) Manuel théorique et pratique de l'application de la méthode des moindres carrés par Elie Ritter. 1858.

6) Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen von Dr. J. Dienger. 1857.

7) Приложеніе Теоріи Вѣроятностей къ вычисленію наблюденій и геодезическихъ измѣреній; составилъ Д-ръ Савичъ. 1857.

8) Journal de Mathématiques par Liouville T. XVIII 1853 a. «Théorie analytique des moindres carrés; par Biver».

ГЛАВА I.

Общія понятія. — Теорія среднихъ величинъ. — Правило ариѳметической среды. — Распространеніе его на случай разнородныхъ наблюденій. — Вѣсы выводовъ. — Связь способа наименьшихъ квадратовъ съ правиломъ ариѳметической среды.

§ 1.

На результатъ всякаго наблюденія имѣетъ вліяніе множество случайныхъ причинъ, источникъ которыхъ заключается или въ несовершенствѣ инструментовъ или въ другихъ подобныхъ обстоятельствахъ: поэтому всякая числовая величина, полученная помощію измѣрительныхъ снарядовъ, представляетъ большее или меньшее уклоненіе отъ истиннаго значенія искомаго количества, т. е. сопровождается извѣстною ошибкою или погрѣшностію. При современныхъ потребностяхъ точныхъ опытныхъ наукъ, гдѣ и теорія и практика достигли высокой степени совершенства, рѣдко бываетъ можно довольствоваться непосредственными данными изъ наблюденій; для полученія возможно точныхъ результатовъ должно безъ сомнѣнія употреблять всѣ возможныя старанія, чтобы ослабить вліяніе погрѣшностей не только при производствѣ наблюденій, но и при вычисленіяхъ.

Изученіе способовъ наблюденій показываетъ, что погрѣшности бываютъ двоякаго рода.— Однѣ изъ нихъ при одномъ и томъ же способѣ наблюденія, т. е. при извѣстномъ положеніи инструмента и пр., отклоняютъ результатъ наблюденія постоянно въ одну и туже сторону, т. е. постоянно увеличиваютъ или уменьшаютъ его; такого рода погрѣшности называются *постоянными*; онѣ необходимо сопровождаютъ каждый результатъ и слѣдовательно не могутъ быть уничтожены, какъ бы часто не производились такого рода наблюденія и какъ бы мы не сочетали результаты этихъ наблюденій между собою. Многія изъ постоянныхъ погрѣшностей подвергнуты точнымъ изслѣдованіямъ въ теоріи инструментовъ; другія уничтожаются разнообразными пріемами наблюденій; тѣ же, причина которыхъ совершенно неизвѣстна, могутъ быть открыты примѣненіемъ даннаго способа наблюденій къ измѣренію точно извѣстной величины, при чемъ открывается среднее значеніе постоянной погрѣшности: такимъ образомъ помощію хорошо изученныхъ и расположенныхъ способовъ наблюденій можно всегда получать результаты, освобожденные отъ постоянныхъ погрѣшностей. Совершенно другимъ характеромъ отличаются *случайныя* погрѣшности наблюденій: онѣ бываютъ то больше, то меньше, то положительны, то отрицательны, и совершенно не могутъ быть предугаданы и исключены изъ отдѣльныхъ наблюденій; взамѣнъ этого онѣ имѣютъ свойство взаимно ослабляться при большомъ числѣ наблюденій; такъ что ихъ можно исключить при-

личнымъ сочетаніемъ наблюденій. Въ различныхъ способахъ наблюденій постоянныя погрѣшности проистекаютъ изъ весьма различныхъ источниковъ и имѣютъ различныя свойства; случайныя погрѣшности сохраняютъ напротивъ свои главныя свойства при всякаго рода наблюденіяхъ; въ Теоріи наивыгоднѣйшаго сочетанія наблюденій принимаются въ расчетъ однѣ только случайныя погрѣшности, постоянныя же считаются тщательно исключенными.

§ 2.

Точкою исхода для аналитическаго рѣшенія вопроса о наивыгоднѣйшихъ результатахъ служитъ возможность на основаніи свойствъ случайныхъ погрѣшностей, дѣйствительная величина которыхъ вообще неизвѣстна, судить о ихъ вѣроятной величинѣ.

Опытъ показываетъ, что при очень большомъ числѣ наблюденій постоянно обнаруживаются слѣдующія свойства случайныхъ погрѣшностей:

1) Для всякаго способа наблюденій существуютъ постоянные предѣлы, далѣе которыхъ не простираются погрѣшности; эти предѣлы болѣе тѣсны для болѣе точныхъ способовъ и наоборотъ. 2) Изъ всѣхъ возможныхъ погрѣшностей чаще всего попадаются очень малыя, близкія къ нулю; наибольшія же, близкія къ предѣламъ, попадаются рѣже всѣхъ другихъ. 3) Число погрѣшностей положительныхъ и отрицательныхъ почти одинаково и онѣ приблизительно имѣютъ одинаковыя числовыя величины, группируясь, какъ сказано, преимущественно около нуля. Изъ этихъ общихъ свойствъ случайныхъ погрѣшностей можно себѣ составить нѣкоторое понятіе о ихъ вѣроятности.

Положимъ, что функція

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \varphi\varepsilon d\varepsilon$$

выражаетъ вѣроятность предположенія, что погрѣшность какого нибудь наблюденія заключается между предѣлами ε_0 и ε; тогда

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon + d\varepsilon} \varphi\varepsilon d\varepsilon$$

будетъ вѣроятность предположенія, что погрѣшность заключается между предѣлами ε_0 и $\varepsilon+d\varepsilon$, а слѣдовательно безконечно малая разность

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon + d\varepsilon} \varphi\varepsilon d\varepsilon - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \varphi\varepsilon d\varepsilon = \varphi\varepsilon d\varepsilon$$

будетъ означать вѣроятность предѣловъ ε и $\varepsilon+d\varepsilon$, т. е. безконечно малую вѣроятность погрѣшности ε. Вѣроятность погрѣшности будетъ тѣмъ больше, чѣмъ большую величину имѣетъ производная $\varphi\varepsilon$; поэтому мы будемъ называть $\varphi\varepsilon$ *относительною вѣроятностію* погрѣшности ε. Если для предѣловъ интеграла возьмемъ предѣлы погрѣшностей b и a, то интегралъ обратит-

ся въ единицу, потому что погрѣшность наблюденія достовѣрно лежитъ между такими предѣлами; слѣд.

$$\int_b^a \varphi\varepsilon d\varepsilon = 1.$$

Притомъ всякія величины меньшія b и большія a, взятыя для предѣловъ должны удовлетворять тому же условію; такъ что необходимо вообще

$$\int_{b-\eta}^{a+\xi} \varphi\varepsilon d\varepsilon = 1,$$

гдѣ ξ и η суть какія нибудь положительныя величины; можно слѣдовательно взять также безконечные предѣлы т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon d\varepsilon = 1$$

и это можетъ служить къ упрощенію интегрированія при частныхъ значеніяхъ $\varphi\varepsilon$.

§ 3.

Когда ошибки наблюденій имѣютъ всѣ свойства случайныхъ, тогда предѣлы возможныхъ погрѣшностей равны между собою, но съ противоположными знаками, и, называя числовую величину ихъ черезъ a, мы имѣемъ:

$$\int_{-a}^{+a} \varphi\varepsilon d\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon d\varepsilon = 1.$$

Видъ $\varphi\varepsilon$ вообще не можетъ быть опредѣленъ безъ помощи какого нибудь частнаго предположенія, потому что эта функція зависитъ отъ множества случайныхъ вліяній, не подлежащихъ изслѣдованію по причинѣ неизвѣстности или сложности ихъ; но мы можемъ выразить аналитически тѣ свойства этой функціи, которыя соотвѣтствуютъ общимъ свойствамъ случайныхъ погрѣшностей. Такимъ образомъ допущеніе равной вѣроятности положительныхъ и отрицательныхъ ошибокъ требуетъ, чтобы функція $\varphi\varepsilon$ была четная; она должна имѣть при предѣлѣ a наименьшую величину равную нулю, и, возрастая непрерывно, достигнуть при $\varepsilon = 0$ наибольшей величины. Интегралъ $\int_x^\infty \varphi\varepsilon d\varepsilon$ долженъ обращаться въ нуль для всякой величины x, большей a; слѣд. $\varphi\varepsilon$ принадлежитъ къ числу функцій, въ которыхъ нарушается законъ непрерывности; въ частныхъ случаяхъ можно однако допустить, что функція $\varphi\varepsilon$ непрерывна,

но такого рода, что $\int_x^\infty \varphi\varepsilon d\varepsilon$ имѣетъ при $x > a$ чрезвычайно малыя, пренебрегаемыя величины.

Вѣроятность предѣловъ $\pm\delta$ есть $\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi\varepsilon d\varepsilon$; она пропорціональна числу погрѣшностей, заключающихся между этими предѣлами; такъ какъ $\varphi\varepsilon$ должна быть четная, то

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi\varepsilon d\varepsilon = 2\int_0^\delta \varphi\varepsilon d\varepsilon,$$

т. е. число ошибокъ большихъ и меньшихъ нуля одинаково. Каждый интегралъ

$$\int_{-a}^{+a} F\varepsilon\varphi\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} F\varepsilon\varphi\varepsilon d\varepsilon$$

можно представить подъ видомъ

$$\Sigma\ F\varepsilon_i\ \varphi\varepsilon_i\ d\varepsilon_i$$

гдѣ знакъ суммованія распространяется по указателю i на всевозможныя значенія ε: по свойству $\varphi\varepsilon$ всѣ элементы этого интеграла для $\varepsilon > +a$ и $\varepsilon < -a$ обратятся въ нуль. Произведеніе $\varphi\varepsilon_i\, d\varepsilon_i$ означаетъ вѣроятность погрѣшности ε_i, т. е. можетъ быть обозначено въ видѣ дроби $\frac{m_i}{\Sigma m_i}$, гдѣ m_i есть число случаевъ благопріятныхъ появленію погрѣшности ε_i, а Σm_i есть постоянная сумма подобныхъ же чиселъ для каждаго значенія погрѣшности. Вслѣдствіе этого:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\varepsilon\varphi\varepsilon d\varepsilon = \frac{\Sigma m_i\, F\varepsilon_i}{\Sigma m_i}.$$

При безконечно большомъ числѣ s наблюденій, по закону большихъ чиселъ, каждая погрѣшность ε_i повторится число разъ, пропорціональное числу m_i; тогда $\frac{\Sigma m_i\, F\varepsilon_i}{\Sigma m_i}$ обратится въ $\frac{\Sigma F\varepsilon_i}{s}$, гдѣ подъ $\Sigma F\varepsilon_i$ разумѣется сумма функцій $F\varepsilon_i$, взятыхъ для всѣхъ тѣхъ значеній ε_i, которыя получились при наблюденіяхъ.

Интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} F\varepsilon\varphi\varepsilon d\varepsilon$ разлагаются на простѣйшія вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^n\varphi\varepsilon d\varepsilon,$$

гдѣ n есть цѣлое число: эти послѣдніе интегралы выражаютъ въ томъ же смыслѣ ариѳметическую среду изъ суммы n—ыхъ степеней погрѣшностей при безконечно большомъ числѣ наблюденій; когда число наблюденій ограничено, то, какъ будетъ ниже доказано, они же представляютъ вѣроятнѣйшія величины такихъ среднихъ ариѳметическихъ выводовъ.

Когда функція $F\varepsilon$ четная, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\varepsilon\varphi\varepsilon d\varepsilon = 2\int_{0}^{\infty} F\varepsilon\varphi\varepsilon d\varepsilon,$$

потому что $\varphi\varepsilon$ также четная; если же $F\varepsilon$ нечетная, то $\int_{-\infty}^{+\infty} F\varepsilon\varphi\varepsilon d\varepsilon = 0$, слѣдовательно также $\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^n\varphi\varepsilon d\varepsilon = 0$ для нечетныхъ значеній n.

Для болѣе яснаго представленія общихъ свойствъ случайныхъ погрѣшностей можно построить кривую $y = \varphi x$; абсциссы этой кривой будутъ числовыя величины погрѣшностей, а ординаты соотвѣтствующія имъ относительныя вѣроятности. Кривая имѣетъ симметричный видъ около оси y—овъ и, приближаясь по обѣ стороны къ оси x—овъ, встрѣчается съ нею при $x = \pm a$; или, если допустимъ, что $\int_{x}^{\infty} \varphi\varepsilon d\varepsilon$ не обращается въ нуль, но только имѣетъ чрезвычайно малую величину, кривая продолжаетъ разстилаться по оси x—въ на весьма близкомъ отъ нея разстояніи и сливается съ нею въ безконечности. Конечныя вѣроятности данныхъ предѣловъ выразятся въ такомъ случаѣ частями площади, ограниченной кривою и осью абсциссъ, и имѣющей величину равную единицѣ.

§ 4.

Помощію наблюденій опредѣляется или непосредственно самая искомая величина, или какая нибудь функція одной или нѣсколькихъ неизвѣстныхъ. Займемся прежде всего изысканіемъ наивыгоднѣйшаго способа сочетанія въ простѣйшемъ случаѣ непосредственныхъ наблюденій.

Положимъ, что для опредѣленія неизвѣстной x произведено было большое число s непосредственныхъ, однородныхъ и равнаго достоинства измѣреній и что результаты освобождены отъ постоянныхъ погрѣшностей; въ такомъ случаѣ для опредѣленія x мы имѣемъ s уравненій:

$$x = a_1,\ x = a_2, \ldots\ x = a_i, \ldots\ x = a_s,$$

изъ которыхъ не имѣемъ причины предпочесть однихъ передъ другими; величины a разнятся между собою на случайныя погрѣшности наблюденій и потому наив годнѣйшее опре-

дѣленіе величины x должно быть составлено симметрично изъ величинъ a_i по такому закону, который соотвѣтствовалъ бы свойствамъ случайныхъ погрѣшностей. Подобные выводы носятъ вообще названіе среднихъ; ихъ можно охактеризовать тѣмъ, что они опредѣляются чрезъ данныя величины a_i помощію уравненія

$$F(\xi, \xi, \ldots \xi) = F(a_1, a_2, \ldots a_s),$$

гдѣ F означаетъ нѣкоторую симметрическую функцію, а ξ есть средній выводъ, поставленный въ первой части уравненія на мѣсто всѣхъ величинъ a_i. Функція F бываетъ обыкновенно однородная; въ такомъ случаѣ первая часть уравненія обращается въ $K\xi^n$, гдѣ n есть степень однородной функціи, и средній выводъ получаетъ видъ:

$$\xi = \left[\frac{1}{K} \cdot F(a_1, a_2 \ldots a_s)\right]^{\frac{1}{n}};$$

таковы средній геометрическій выводъ

$$\xi = \sqrt[s]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_i \ldots a_s}$$

и средній выводъ изъ n—ыхъ степеней:

$$\xi = \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_s^n}{s}}.$$

Мы видѣли выше, что изъ свойствъ случайныхъ погрѣшностей для всякой нечетной функціи $F\varepsilon$ слѣдуетъ условіе

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\varepsilon\varphi\varepsilon d\varepsilon = 0,$$

которое распадается на простѣйшія вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^n \varphi\varepsilon d\varepsilon = 0,$$

гдѣ n есть число нечетное. Если погрѣшности имѣютъ вполнѣ случайный характеръ и если число наблюденій безконечно велико, то это условіе, какъ мы видѣли, равносильно съ уравненіемъ:

$$\frac{\Sigma\varepsilon_i^n}{s} = 0.$$

При обыкновенныхъ обстоятельствахъ мы не имѣемъ права сдѣлать такого заключенія въ точномъ смыслѣ, но если наблюденія хорошо освобождены отъ постоянныхъ погрѣшностей и если число ихъ значительно, то естественно допустить, что $\frac{\Sigma\varepsilon_i^n}{s}$, если не равна нулю, то покрайней мѣрѣ имѣетъ чрезвычайно малую величину. Поэтому, называя чрезъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_i \ldots \varepsilon_s$ погрѣшности въ опредѣленіи величинъ $a_1, a_2 \ldots a_i \ldots a_s$, будетъ весьма вѣроятно опредѣленіе

x изъ уравненій $x - a_1 = \varepsilon_1$; $x - a_2 = \varepsilon_2 \ldots$ $x - a_i = \varepsilon_i, \ldots$ $x - a_s = \varepsilon_s$ подъ условіемъ что сумма нечетныхъ степеней погрѣшностей ε_i равна нулю. Называя величину x опредѣленную такимъ образомъ помощію степеней $2m - 1$ черезъ ξ_{2m-1}, получимъ для опредѣленія ξ_{2m-1} уравненіе

$$\Sigma\, \varepsilon_i^{2m-1} = \Sigma\, (\xi_{2m-1} - a_i)^{2m-1} = 0,$$

гдѣ знакъ Σ распространяется на всѣ значенія i по порядку наблюденій отъ 1 до s. Въ простѣйшемъ случаѣ $m = 1$ мы имѣемъ

$$\Sigma\, (\xi_1 - a_i) = 0,$$

откуда

$$\xi_1 = \frac{\Sigma a_i}{s}.$$

При всякомъ другомъ значеніи m условіе $\Sigma\varepsilon_i^{2m-1} = 0$ приводитъ для опредѣленія ξ_{2m-1} къ чрезвычайно сложнымъ уравненіямъ высшихъ степеней и не даетъ для величины ξ_{2m-1} соотвѣтствующаго простѣйшаго средняго вывода:

$$\left[\frac{\Sigma\, a_i^{2m-1}}{s}\right]^{\frac{1}{2m-1}}$$

поэтому наивыгоднѣйшимъ результатомъ считается всегда выводъ ξ_1, который называется *среднимъ ариѳметическимъ выводомъ* или *ариѳметическою средою*. Ариѳметическая среда есть безъ сомнѣнія самое простое и самое естественное изо всѣхъ возможныхъ сочетаній и потому издавна употреблялась для опредѣленія неизвѣстныхъ изъ многочисленныхъ непосредственныхъ данныхъ.

Погрѣшность ариѳметическаго вывода есть $\frac{\Sigma\varepsilon_i}{s}$; вѣроятность, чтобы она равнялась именно нулю безконечно мала; но эта погрѣшность необходимо очень мала при большомъ числѣ хорошаго достоинства наблюденій. Чтобы показать яснѣе значеніе средняго ариѳметическаго вывода въ зависимости отъ числа и достоинства наблюденій и вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлить благонадежность его въ сравненіи съ другими выводами, опредѣляемыми изъ условій $\Sigma\varepsilon^{2m-1} = 0$; рѣшимъ слѣдующій общій вопросъ: найти вѣроятность предположенія, что сумма нечетныхъ степеней случайныхъ погрѣшностей наблюденій не превышаетъ даннаго предѣла. Этотъ важный вопросъ былъ разрѣшенъ Лапласомъ для суммы первыхъ степеней погрѣшностей; его рѣшеніе представляетъ намъ единственное и совершенно полное доказательство правила ариѳметической среды. Весьма легко обобщить анализъ Лапласа и примѣнить его къ суммѣ всякихъ нечетныхъ степеней.

§ 5.

Прежде нежели приступимъ къ разрѣшенію предложеннаго вопроса сдѣлаемъ небольшое отступленіе для того, чтобы приготовить нѣкоторыя формулы, необходимыя впослѣдствіи.

Слѣдуя общепринятому обозначенію, положимъ:

$$\int_0^1 \left[lg\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{p-1} dx = \Gamma(p)$$

$$\int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}\, dy = \mathrm{B}\,(p,q);$$

определённые интегралы $\mathrm{B}\,(p,q)$ и $\Gamma\,(p)$ извѣстны подъ именемъ Эйлеровыхъ интеграловъ перваго и втораго рода. Если положимъ $lg\,\frac{1}{x}=z$ въ выраженіи $\Gamma\,(p)$ и $y=\frac{1}{1+x}$ въ выраженіи $\mathrm{B}\,(p,\,q)$, то найдемъ:

$$\Gamma\,(p) = \int_0^\infty z^{p-1}\, e^{-z}\, dz.$$

$$\mathrm{B}\,(p,q) = \int_0^\infty x^{p-1}\,(1+x)^{-(p+q)}\, dx.$$

Разложеніе по частямъ интеграла $\Gamma\,(p)$ даетъ уравненіе

$$\Gamma\,(p) = (p-1).\ \Gamma\,(p-1).$$

Вставимъ въ $\Gamma\,(p)$ вмѣсто z величину uz и вмѣсто dz величину udz, получимъ

$$\int_0^\infty z^{p-1}\, e^{-uz}\ dz = \frac{\Gamma\,(p)}{u^p}$$

Положимъ $u=1+x$, и замѣнимъ p суммою $p+q$, тогда выдетъ:

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty z^{p+q-1}\, e^{-(1+x)z}\, dz;$$

помножая это выраженіе на $x^{p-1}dx$ и интегрируя между предѣлами 0 и ∞, найдемъ:

$$\int_0^\infty x^{p-1}\,(1+x)^{-(p+q)}\, dx = \mathrm{B}\,(p,q) = \frac{1}{\Gamma\,(p+q)} \int_0^\infty z^{p+q-1}\, e^{-z}\, dz.\ \int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-zx}\, dx,$$

или

$$\mathrm{B}\,(p,q) = \frac{\Gamma\, p}{\Gamma\,(p+q)} \int_0^\infty \frac{z^{p+q-1} e^{-z}\, dz}{z^p},$$

откуда получаемъ наконецъ извѣстное соотношенiе Эйлеровыхъ интеграловъ:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p).\ \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Въ случаѣ $p = q = \frac{1}{2}$ эта формула, по причинѣ $\Gamma(1) = 1$, обращается въ

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \pi;$$

отсюда получимъ

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Поставимъ въ выраженiи $\Gamma(p)$ вмѣсто z величину t^2 и слѣд. вмѣсто dz выраженiе $2tdt$, тогда будетъ

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty t^{2p-1}\, e^{-t^2} dt;$$

при $p = \frac{1}{2}$ это уравненiе служитъ къ опредѣленiю интеграла $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ и мы имѣемъ

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Для всѣхъ цѣлыхъ и положительныхъ величинъ p имѣемъ

$$\Gamma(p) = 1.\ 2.\ 3 \ldots (p-1),$$

слѣд. для нечетныхъ чиселъ n имѣемъ вообще

$$2\int_0^\infty t^n e^{-t^2} dt = 1.\ 2.\ 3.\ \frac{n-1}{2}$$

Интегралы $2\int_0^\infty t^n e^{-t^2} dt$ при четномъ n будутъ зависѣть отъ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; потому что

въ этомъ случаѣ $p = \frac{n+1}{2}$ не можетъ сократиться и мы имѣемъ:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t^2} dt = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

и слѣд. при четномъ n имѣемъ

$$2\int_0^\infty t^n e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

Такимъ образомъ при всякомъ m выходить:

$$2\int_0^\infty t^{2m-1} e^{-t^2} dt = 1.\,2.\,3\,..\,(m-1).$$

и

$$2\int_0^\infty t^{2m} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2m-3}{2}\cdot\frac{2m-1}{2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

Изъ уравненія

$$2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

слѣдуетъ очевидно

$$\int_0^\infty e^{-(t+a)^2} dt + \int_0^\infty e^{-(t-a)^2} dt = \sqrt{\pi};$$

отсюда

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\left(\frac{e^{2at}+e^{-2at}}{2}\right) dt = e^{a^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

и, подставивъ сюда вмѣсто a мнимую величину ai, гдѣ $i=\sqrt{-1}$, получимъ

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\cos 2at\cdot dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-a^2}.$$

Рѣшеніе вопросовъ, зависящихъ отъ большихъ чиселъ, приводится по большей части къ интегралу

$$\int_0^t e^{-t^2} dt.$$

По свойству функціи e^{-t^2} убывать чрезвычайно быстро съ возрастаніемъ t, этотъ интегралъ даже при посредственныхъ величинахъ t чрезвычайно мало отличается отъ своего предѣла $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; величины его вычисляются приближенно помощію рядовъ. Таблицы величинъ интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

или интеграла

$$\int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

и дополнительнаго къ нему

$$\int_t^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

можно найти во многихъ сочиненіяхъ. [1]) — При $t=4$ интегралъ $\int_0^4 e^{-t^2}dt$ такъ уже мало отличается отъ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, что разность

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^4 e^{-t^2}dt = \int_4^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

выходитъ менѣе 0,000000015; даже при $t=3$ разность эта весьма незначительна; она менѣе 0,0000196; такимъ образомъ въ приложеніяхъ можно безъ замѣтной погрѣшности замѣнять предѣлы интеграла, если они не менѣе 3-хъ или 4-хъ, безконечностію Понятно что тоже свойство имѣютъ интегралы:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t^2}\,dt \text{ и } \int_0^\infty e^{-t^2}\cos 2at\,dt,$$

хотя и не въ одинаковой степени.

---

1) Berliner Astronomisches Jahrbuch, 1834. Основанія Теоріи Вѣроятностей Буняковскаго. Exposition de la Théorie des Chances par Cournot и пр.

§ 6.

Нерѣдко нужно бываетъ исполнить многократное интегрированіе такимъ образомъ, чтобы предѣлы распространялись на всѣ значенія перемѣнныхъ, удовлетворяющія нѣкоторымъ даннымъ условіямъ; такое интегрированіе можно привести къ безконечнымъ предѣламъ помощію пріема предложеннаго Дирикле. Изложимъ главныя основанія этого пріема.

Если въ опредѣленномъ интегралѣ

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

замѣнимъ a мнимою величиною $a \mp bi$, то получимъ

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,(\cos bx \pm i\sin bx)\,dx = \frac{1}{a \mp bi} = \frac{a \pm bi}{a^2 + b^2};$$

отдѣляя въ этомъ выраженіи дѣйствительныя величины отъ мнимыхъ, найдемъ

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{и} \quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Помножимъ второй изъ этихъ интеграловъ на da и возмемъ интегралъ между предѣлами a_1 и a_0, тогда получимъ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a_0 x} - e^{-a_1 x}}{x}\,\sin bx\,dx = arctg\,\frac{a_1}{b} - arctg\,\frac{a_0}{b};$$

положимъ здѣсь $a_1 = \infty$ и $a_0 = 0$; тогда

$$\int_0^\infty \sin bx.\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Къ этому опредѣленному интегралу приводится

$$\int_0^\infty \sin bx \cos ax\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \sin(b+a)\,x\,\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \sin(b-a)\,x\,\frac{dx}{x};$$

при $b > a$ оба интеграла во второй части положительны и равны $\frac{\pi}{2}$, слѣд въ этомъ случаѣ

$$\int_0^\infty \sin bx.\cos ax\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}$$

но если $b < a$, то второй интегралъ перемѣняетъ свой знакъ и мы получаемъ

$$\int_0^\infty \sin bx \ \cos ax \frac{dx}{x} = 0.$$

Изъ этого мы заключаемъ, что интегралъ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin bx . \cos ax \frac{dx}{x}$$

равняется или единицѣ или нулю, смотря потому будетъ ли b больше или меньше a; или еще проще интегралъ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty snx . \cos kx \frac{dx}{x}$$

будетъ равенъ единицѣ для всѣхъ величинъ k, заключающихся между предѣлами ± 1, и равенъ нулю для всѣхъ другихъ значеній k. Замѣняя въ интегралѣ

$$\int_0^\infty sn\, bx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$\sin bx$ его выраженіемъ чрезъ показательныя функціи, можно получить другія выраженія, имѣющія тоже свойство.

$$2\int_0^\infty \sin bx \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{e^{bxi}}{i}\,\frac{dx}{x} - \int_0^\infty \frac{e^{-bxi}}{i}\,\frac{dx}{x} = \pi,$$

если положимъ во второмъ интегралѣ $x = -x$, то получимъ

$$2\int_0^\infty \sin bx \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{e^{bxi}}{i}\,\frac{dx}{x} - \int_0^{-\infty} \frac{e^{bxi}}{i}\,\frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{bxi}}{i}\,\frac{dx}{x} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-bxi}}{i}\,\frac{dx}{x} = \pi;$$

при помощи этихъ равенствъ найдемъ

$$\int_0^\infty \sin bx \cos ax \frac{dx}{x} = \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+b)xi}\frac{dx}{x} - \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a-b)xi}\frac{dx}{x}$$

или

$$\int_0^\infty \sin bx \cos ax \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{axi}. \sin bx. \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-axi} \sin bx \frac{dx}{x};$$

сдѣлавъ здѣсь по прежнему $b = 1$ и $a = k$, мы должны заключить, что интегралъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm kxi} \sin x \frac{dx}{x}$$

равенъ нулю или единицѣ, смотря потому будетъ ли k болѣе или менѣе единицы. Этимъ то свойствомъ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin x \cos kx \frac{dx}{x} \text{ или } \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{kxi} \sin x \frac{dx}{x} \text{ и т. п.}$$

пользуется Дирикле для преобразованія многократныхъ интеграловъ.

Положимъ что требуется найти интегралъ

$$V = \iiint \ldots \Phi\ (z_1, z_2 \ldots z_s).\ dz_1\, dz_2 \ldots\ dz_s,$$

распространяя предѣлы на всѣ значенія перемѣнныхъ $z_1, z_2 \ldots z_s$, удовлетворяющія условію, что некоторая функція $f(z_1, z_2 \ldots z_s)$ этихъ перемѣнныхъ не превосходитъ по числовой величинѣ даннаго количества r_1, тогда дробь $\frac{f(z_1, z_2 \ldots z_s)}{r_1}$ не должна выходить изъ предѣловъ ± 1. Этому очевидно мы можемъ удовлетворить, помножая каждый элементъ интеграла V на функцію

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin x.\ \cos\left[\frac{f(z_1, z_2 \ldots z_s)x}{r_1}\right]\frac{dx}{x} \text{ или на } \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm\frac{f(z_1, z_2, \ldots z_s)}{r_1}xi} \sin x \frac{dx}{x}$$

и потомъ распространяя предѣлы интегрированія относительно $z_1, z_2 \ldots z_s$ на всѣ возможныя величины этихъ перемѣнныхъ, т. е. взявъ ихъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, потому что при этомъ уничтожатся всѣ элементы, для которыхъ $f(z_1, z_2 \ldots z_s) > r_1$, т. е. мы получаемъ

$$V = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin x \frac{dx}{x} \iiint_{+\infty}^{+\infty} \ldots \Phi(z_1, z_2 \ldots z_s).\ \cos\left[\frac{f(z_1, z_2, \ldots z_s)x}{r_1}\right] dz_1\, dz_2 \ldots dz_s$$

или

$$V = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \frac{dx}{x} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \ldots \Phi(z_1, z_2 \ldots z_s)\, e^{\pm\frac{f(z_1, z_2 \ldots z_s)}{r_1}xi}\, dz_1 .\ dz_2 .\ .\ dz_s.$$

Если положимъ $\frac{x}{r_1} = \alpha$ и $dx = r_1\, d\alpha$, то выдетъ

$$V = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty snr_1 \alpha \, \frac{d\alpha}{\alpha} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \ldots \Phi(z_1, z_2 \ldots z_s) \cos \left[\alpha f(z_1, z_2 \ldots z_s) \right] dz_1 \, dz_2 \ldots dz_s,$$

или

$$V = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} snr_1 \alpha \, \frac{d\alpha}{\alpha} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \ldots \Phi(z_1, z_2 \ldots z_s) \, e^{\pm \alpha f(z_1, z_2 \ldots z_s) \cdot i} dz_1 \, . \, dz_2 \ldots dz_s$$

Выраженіямъ V можно дать еще другой видъ, замѣтивъ что

$$\frac{snr_1 \alpha}{\alpha} = \frac{e^{r_1 \alpha i} - e^{-r_1 \alpha i}}{2\alpha i} = \frac{1}{2} \int_{-r_1}^{+r_1} \cos r\alpha . \, dr = \frac{1}{2} \int_{-r_1}^{+r_1} e^{\pm r\alpha i} dr:$$

на основаніи этихъ равенствъ получимъ:

$$V = \frac{1}{\pi} \int_{-r_1}^{+r_1} dr \int_0^\infty \cos r\alpha d\alpha \iiint_{-\infty}^{+\infty} \ldots \Phi(z_1, z_2 \ldots, z_s) \cos \left[\alpha f(z_1, z_2 \ldots z_s) \right] dz_1 \, dz_2 \ldots dz_s$$

или

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-r_1}^{+r_1} dr \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm r\alpha i} d\alpha \iiint_{-\infty}^{+\infty} \ldots \Phi(z_1, z_2 \ldots z_s) \, e^{\pm \alpha i f(z_1, z_2 \ldots z_s)} dz_1 \, dz_2 \ldots dz_s$$

По причинѣ двойнаго знака при показательныхъ функціяхъ во второмъ выраженіи V, можно разсматривать первое выраженіе, какъ частный видъ втораго: въ самомъ дѣлѣ сложивъ два раза выраженія V. взятыя съ противоположными знаками сперва при $e^{\alpha i f(z_1, z_2 \ldots z_s)}$ потомъ при $e^{r\alpha i}$ показательныя функціи замѣнятся косинусами и предѣлы можно будетъ привести къ одинакимъ, распространяя ихъ относительно α отъ 0 до ∞ и умножая интегралъ на 2.

Если требуется, чтобы предѣлы многократнаго интеграла распространялись на такія величины перемѣнныхъ, для которыхъ функція $f(z_1 . z_2 .. z_s)$ оставалась бы менѣе r_2 и болѣе r_1, то множитель k должно опредѣлить изъ условія:

$$f = \frac{(1+k) \, r_2 + (1-k) \, r_1}{2},$$

гдѣ для сокращенія f означаетъ функцію $f(z_1, z_2 \ldots z_s)$; при такомъ условіи функція f дѣйствительно обращается въ r_1 только при $k = -1$ и въ r_2 при $k = +1$ и въ промежуткѣ этихъ значеній постоянно возрастаетъ отъ r_1 до r_2, потому что производная $\frac{df}{dk} = \frac{r_2 - r_1}{2}$ всегда положительна.

Опредѣляя k находимъ

$$k=\frac{f}{\frac{r_2-r_1}{2}}-\frac{\frac{r_2+r_1}{2}}{\frac{r_2-r_1}{2}}$$

и, если положимъ для сокращенія $\frac{r_2+r_1}{2}=g$ и $\frac{r_2-r_1}{2}=l$, интегралъ

$$V=\iiint\ldots\Phi.\,dz_1,\,dz_2\ldots dz_s$$

опредѣленный подъ данными условіями обратится въ

$$V=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} snx.\,e^{-\frac{gx}{l}}\,\frac{dx}{x}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\ldots\Phi.\,e^{\frac{fx}{l}i}dz_1\,dz_2\ldots dz_s.$$

Положимъ $\frac{x}{l}=\alpha$; тогда

$$V=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} snl\alpha.\,e^{-g\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\ldots\Phi.\,e^{f\alpha i}dz_1\,dz_2\ldots dz_s$$

или, замѣняя $\frac{snl\alpha}{\alpha}$ выраженіемъ $\frac{1}{2}\int_{-l}^{+l}e^{\pm y\alpha i}dy$,

$$V=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{+l}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(\pm y-g)\alpha i}d\alpha\iiint_{-\infty}^{+\infty}\ldots\Phi.\,e^{f\alpha i}dz_1\,dz_2\ldots dz_s$$

Двойной знакъ при y показываетъ, что функція V не измѣняется отъ перемѣны $+y$ на $-y$; слѣд. можно взять

$$V=\frac{1}{\pi}\int_0^{l}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(y-g)\alpha i}d\alpha\iiint_{-\infty}^{+\infty}\ldots\Phi.\,e^{f\alpha i}dz_1\,dz_2\ldots dz_s$$

Отсюда заключаемъ:

$$\frac{dV}{dy}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(y-g)\alpha i}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\ldots\Phi.\,e^{f\alpha i}dz_1\,dz_2\ldots dz_s.$$

Разсмотримъ въ частномъ случаѣ однократный интегралъ

$$V=\int\Phi z\,dz.$$

Пусть его требуется взять относительно z между предѣлами z и z_0; прилагая къ этому случаю теорему Дирикле, мы имѣемъ:

$$f=z;\ g=\frac{z+z_0}{2};\ l=\frac{z-z_0}{2};\ l-g=-z_0;\ dy=\frac{dz}{2};\ \frac{dV}{dz}=\Phi z=\frac{1}{2}\cdot\frac{dV}{dy}\ \text{и}$$

$$V=\int_{z_0}^{z}\Phi z\,dz=\frac{1}{\pi}\int_0^l dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(y-g)\alpha i}\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi z.\,e^{z\alpha i}dz$$

$$\frac{dV}{dy}=2\Phi z=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(y-g)\alpha i}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi z.\,e^{z\alpha i}\,dz.$$

Если условіе состоитъ въ томъ, чтобы z равнялся z_0, то $\frac{dV}{dz}=\Phi z_0$; $y=l=0$; $g=z_0$ и мы получаемъ выраженіе, извѣстное подъ названіемъ теоремы Фурье:

$$\Phi z_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_0\alpha i}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi z.\,e^{z\alpha i}\,dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi z.\,e^{(z-z_0)\alpha i}\,dz$$

Знакъ величины g можно измѣнять въ одно время съ перемѣной знака f, не измѣняя величины V; слѣд. также

$$\Phi z_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{z_0\alpha i}\,dz\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi z\,e^{-z\alpha i}\,dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi z\,e^{-(z-z_0)\alpha i}\,dz$$

или, соединяя оба выраженія Φz_0 въ одно,

$$\Phi z_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi z\cos(z-z_0)\,\alpha.\,dz=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi z\cos(z-z_0)\,\alpha\,dz.$$

Такъ какъ здѣсь z_0 можетъ имѣть всякую данную величину, то, сдѣлавъ перемѣннымъ $z_0=x$, имѣемъ

$$\Phi x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi z\,e^{(z-x)\,\alpha i}\,dz=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi z\cos(z-x)\,\alpha.\,dz.$$

Отъ вышеизложеннаго легко перейти къ болѣе общему случаю, когда предѣлы интеграла

$$V=\iiint\ldots\ \Phi.\,dz_1\,dz_2\ldots dz_s$$

должны распространяться на такія величины перемѣнныхъ $z_1,\ z_2\ldots z_s$, для которыхъ нѣкоторыя функціи $f_1,\ f_2\ldots f_n$ этихъ перемѣнныхъ соотвѣтственно не выходятъ изъ предѣловъ $\pm r_1;\ \pm r_2;\ \ldots\pm r_n$. Прилагая въ такомъ случаѣ теорему Дирикле къ каждому условію, имѣемъ:

$$V=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int_0^\infty snx_1\frac{dx_1}{x_1}\int_0^\infty snx_2\frac{dx_2}{x_2}\cdots\int_0^\infty snx_n\frac{dx_n}{x_n}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\Phi\ \cos\frac{f_1x_1}{r_1}\cos\frac{f_2x_2}{r_2}\cdots\cos\frac{f_nx_n}{r_n}\,dz_1\,dz_2\ldots dz_s$$

или

$$V=\frac{1}{\pi^n}\int_{-\infty}^{+\infty}snx_1\frac{dx_1}{x_1}\int_{-\infty}^{+\infty}snx_2\frac{dx_2}{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}snx_n\frac{dx_n}{x_n}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\Phi\,e^{i\left[\frac{f_1x_1}{r_1}+\frac{f_2x_2}{r_2}+\cdots\frac{f_nx_n}{r_n}\right]}dz_1\,dz_2\ldots dz_s$$

положимъ $\frac{x_1}{r_1}=\alpha_1$; $dx_1=r_1d\alpha_1$; $\frac{x_2}{r_2}=\alpha_2$. $dx_2=r_2d\alpha_2$ и т. д.

$$V=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int_0^\infty snr_1\alpha_1\frac{d\alpha_1}{\alpha_1}\int_0^\infty snr_2\alpha_2\frac{d\alpha_2}{\alpha_2}\cdots\int_0^\infty snr_n\alpha_n\frac{d\alpha_n}{\alpha_n}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\Phi.\cos f_1\alpha_1\cos f_2\alpha_2\cdots\cos f_n\alpha_n\,dz_1\,dz_2\ldots dz_s,$$

или

$$V=\frac{1}{\pi^n}\int_{-\infty}^{+\infty}snr_1\alpha_1\frac{d\alpha_1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{+\infty}snr_2\alpha_2\frac{d\alpha_2}{\alpha_2}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}snr_n\alpha_n\frac{d\alpha_n}{\alpha_n}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\Phi.\,e^{i\,[f_1\alpha_1+f_2\alpha_2+\cdots+f_n\alpha_n]}\,dz_1\,dz_2\ldots dz_s;$$

или, выражая помощію dr_1, dr_2...

$$V=\frac{1}{\pi^n}\int_{-r_1}^{+r_1}dr_1\int_{-r_2}^{+r_2}dr_2\cdots\int_{-r_n}^{+r_n}dr_n\int_0^\infty\cos r_1\alpha_1\,d\alpha_1\cdots\int_0^\infty\cos r_n\alpha_n\,d\alpha_n\iiint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\Phi.\cos f_1\alpha_1\cos f_2\alpha_2\ldots\cos f_n\alpha_n\,dz_1\,dz_2\ldots dz_s$$

$$V=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-r_1}^{+r_1}dr_1\int_{-r_2}^{+r_2}dr_2\cdots\int_{-r_n}^{+r_n}dr_n\int_{-\infty}^{\infty}e^{-r_1\alpha_1i}d\alpha_1\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-r_2\alpha_2i}d\alpha_2\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-r_n\alpha_ni}d\alpha_n\iiint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\Phi.\,e^{i[f_1\alpha_1+f_2\alpha_2+\cdots+f_n\alpha_n]}dz_1\,dz_2\ldots dz_s$$

Подобнымъ же образомъ можно обобщить и всѣ другія выраженія, выведенныя для одного условія.

§ 7.

Обратимся къ изысканію вѣроятности предположенія, что сумма нечетныхъ степеней погрѣшностей многочисленныхъ наблюденій заключается между данными предѣлами. Разсмотримъ сначала рѣшеніе этого вопроса тѣмъ способомъ, который Лапласъ прилагалъ къ рѣшенію всѣхъ вопросовъ подобнаго рода.

Представимъ себѣ, что выраженіе

$$\left[x^{\varepsilon_1^n}+x^{\varepsilon_2^n}+\cdots+x^{\varepsilon_m^n}\right]^s=\left[\sum_{i=1}^{i=m}x^{\varepsilon_i^n}\right]^s,$$

гдѣ s есть цѣлое число, разложено по степенямъ x и пусть будетъ A_l коэффиціентъ при x^l. Если бы мы исполнили это разложеніе помощію простаго умноженія и до конца не соединяли бы подобныхъ членовъ, то коэффиціэнты при степеняхъ x оставались бы до конца равными единицамъ; изъ этого мы заключаемъ что A_l означаетъ число членовъ разложенія, показатели которыхъ, содержа s слагаемыхъ взятыхъ изъ ряда величинъ ε_1^n, $\varepsilon_2^n \ldots \varepsilon^n_m$, равны l. Ясно, что въ разложеніе войдутъ всѣ возможныя суммы такого рода и слѣд. A_l есть число всевозможныхъ сочетаній изъ количествъ ε_1^n, $\varepsilon_2^n \ldots \varepsilon^n_m$ съ повтореніями, удовлетворяющихъ условію, что сумма входящихъ въ нихъ членовъ равна l. Пусть ε_1, $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$ означаютъ всѣ возможныя равновѣроятныя погрѣшности наблюденій, число которыхъ есть s; тогда A_l будетъ выражать число случаевъ, благопріятныхъ предположенію, что сумма n—ыхъ степеней погрѣшностей равна l. Если положивъ $x=1$, то вторая часть разложенія обратится въ число всѣхъ возможныхъ предположеній о величинѣ l, которое, какъ видно изъ первой части разложенія будетъ равно m^s; такъ что $\frac{A_l}{m^s}$ выразитъ вѣроятность суммы n—ыхъ степеней, равной l Чтобы распространить это заключеніе на случай неравновѣроятныхъ погрѣшностей, положимъ, что въ ряду ε_1, $\varepsilon_2 \ldots$ находится α_1 ошибокъ равныхъ ε_1, α_2 равныхъ ε_2 и т. д. Тогда вѣроятность суммы l опредѣлился изъ разложенія

$$\left[\sum \alpha_i x^{\varepsilon_i^n}\right]^s = \text{суммѣ членовъ вида } A_l x^l$$

и будетъ $\frac{A_l}{(\Sigma\alpha_i)^s}$. Въ этомъ случаѣ коэффиціенты α_i пропорціональны простымъ вѣроятностямъ соотвѣтствующихъ погрѣшностей; если означимъ этѣ вѣроятности черезъ β_i и вѣроятности суммъ n—ыхъ степеней погрѣшностей черезъ B_l; т. е. положимъ

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\Sigma\alpha_i} \text{ и } B_l = \frac{A_l}{(\Sigma\alpha_i)^s}$$

предыдущее разложеніе приметъ видъ:

$$\left[\sum \beta_i x^{\varepsilon_i^n}\right]^s = \text{суммѣ членовъ вида } B_l x^l.$$

Если между погрѣшностями ε_i находится одинаковое число положительныхъ и отрицательныхъ, *имѣющихъ при одинаковой числовой величинѣ одинакія* вѣроятности, *то всякому* положительному показателю l будетъ соотвѣтствовать необходимо отрицательный $-l$ и коэффиціэнты при членахъ x^l и x^{-l} будутъ одинаковы, такъ что въ этомъ случаѣ мы получимъ, распространяя сумму Σ на прежніе предѣлы:

$$\left[\frac{1}{2} \sum \beta_i \left(x^{\varepsilon_i^n} + x^{-\varepsilon_i^n}\right)\right]^s = \text{суммѣ членовъ вида } B_l\ (x^l + x^{-l});$$

здѣсь n предполагается по смыслу задачи числомъ нечетнымъ. Сдѣлаемъ $x = e^{\theta i}$;

$$\left[\sum \beta_i \cos \varepsilon_i^n \theta\right]^s = \text{суммѣ членовъ вида } 2B_l \cos l\theta$$

При переходѣ къ непрерывному измѣненію величины ε_i сумма обратится въ интегралъ, распространенный на предѣлы возможныхъ погрѣшностей и $\beta_i = \varphi\varepsilon_i d\varepsilon_i$, слѣдовательно

$$\left[\int_{-a}^{+a} \varphi\varepsilon \cos \varepsilon^n\theta.\ d\varepsilon\right]^s = \text{суммѣ членовъ вида } 2B_l \cos l\theta,$$

или по свойству функціи $\varphi\varepsilon$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon \cos \varepsilon^n\theta\ d\varepsilon\right]^s = \text{суммѣ членовъ вида } 2B_l \cos l\theta.$$

Для отдѣленія вѣроятности B_l воспользуемся свойствомъ опредѣленнаго интеграла:

$$\int_0^\pi \cos l\theta.\ \cos \lambda\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos (l+\lambda)\ \theta.\ d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos (l-\lambda)\ \theta.\ d\theta,$$

который обращается въ $\frac{\pi}{2}$ при $\lambda = l$ и въ нуль для всѣхъ цѣлыхъ значеній l и λ. Такъ какъ сумма во второй части нашего разложенія также непрерывна и l имѣетъ всѣ возможныя величины между извѣстными предѣлами; то для того, чтобы приложить свойство этого интеграла къ нашему случаю, допустимъ что величина l возрастаетъ на безконечно малыя постоянныя разности dl, т. е. имѣетъ величины: $0, \pm dl, \pm 2dl, \ldots\ l = tdl,\ (t+1)\,dl\ \ldots$ Подставляя вмѣсто l величину tdl, гдѣ t есть для всѣхъ значеній l цѣлое число, и сдѣлавъ $\theta dl = \psi$, получимъ

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon \cos \varepsilon^n\theta\ d\varepsilon\right]^s = \text{суммѣ членовъ вида } 2B_l \cos t\psi.$$

Помножимъ обѣ части этого равенства на $\cos t\psi d\psi$ и возмемъ интегралъ отъ $\psi = 0$ до $\psi = \pi$; тогда во второй части останется только $B_l.\ \pi$ и слѣд.

$$B_l = \frac{1}{\pi}\int_0 \cos t\psi.\ d\psi.\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon.\ \cos \varepsilon^n\theta.\ d\varepsilon\right]^s$$

и, подставивъ опять $t\psi = l\theta,\ d\psi = d\theta.\ dl$, получимъ

$$B_l = \frac{dl}{\pi}\int_0^\infty \cos l\theta.\ d\theta\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon.\ \cos \varepsilon^n\theta.\ d\varepsilon\right]^s = P_l\, dl.$$

Таково выраженіе вѣроятности, что сумма нечетныхъ n степеней погрѣшностей наблюденій равна числу l. Чтобы найти вѣроятность, что эта сумма заключается между предѣлами $\pm l$, должно очевидно взять сумму вѣроятностей B_l между этими предѣлами и, такъ какъ l измѣняется непрерывно, то мы имѣемъ

$$p_n = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} dl \int_0^{\infty} \cos l\theta \, d\theta \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon . \cos \varepsilon^n \theta \, d\varepsilon \right]^s$$

§ 8.

Этотъ пріемъ, который Лапласъ постоянно употреблялъ для рѣшенія вопросовъ подобнаго рода, въ сущности одинаковъ съ болѣе общимъ и удобнымъ способомъ Дирикле Чтобы приложить этотъ послѣдній способъ къ рѣшенію нашего вопроса, замѣтимъ, что если вѣроятность какой нибудь погрѣшности ε_i есть $\varphi\varepsilon_i de_i$, то вѣроятность извѣстной системы погрѣшностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_s$ выразится произведеніемъ

$$\varphi\varepsilon_1 \, \varphi\varepsilon_2 \dots \varphi\varepsilon_s . \, d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_s$$

и вѣроятность, что погрѣшности заключаются между нѣкоторыми предѣлами будетъ:

$$p_n = \iiint \dots \varphi\varepsilon_1 \, \varphi\varepsilon_2 \dots \varphi\varepsilon_s . \, d\varepsilon_1 . \, d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_s$$

Согласно съ требованіемъ вопроса интегралы должно распространить на всѣ величины ε, для которыхъ $\varepsilon_1{}^n + \varepsilon_2{}^n + \dots + \varepsilon_s{}^n$ заключается между предѣлами $\pm l$, или функція

$$\frac{\varepsilon_1{}^n + \varepsilon_2{}^n + \dots + \varepsilon_s{}^n}{l}$$

между предѣлами ± 1; по этому помножая элементъ интеграла p_n на функцію

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} snx \frac{dx}{x} . \, e^{kxi}, \text{ гдѣ } k = \frac{\varepsilon_1{}^n + \varepsilon_2{}^n + \dots + \varepsilon_s{}^n}{l},$$

полагая $\frac{x}{l} = \theta$ и отдѣляя интегралы относительно каждаго перемѣннаго, получимъ по способу Дирикле

$$p_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} sn \, l\theta \frac{d\theta}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_1 \, e^{i\theta\varepsilon_1{}^n} d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_2 \, e^{i\theta\varepsilon_2{}^n} d\varepsilon_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_s \, e^{i\theta\varepsilon_s{}^n} d\varepsilon_s;$$

при нечетномъ n имѣетъ очевидно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_i \, e^{i\theta\varepsilon_i{}^n} d\varepsilon_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_i \cos \varepsilon_i{}^n \theta d\varepsilon_i$$

и, такъ какъ всѣ интегралы относительно ε между одинакими предѣлами равны между собою, то мы имѣемъ:

$$p_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} snl\theta.\frac{d\theta}{\theta}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\varepsilon.\ cos\ \varepsilon^n\theta\ \ d\varepsilon\right]^s;$$

наконецъ, подставляя

$$\frac{snl\theta}{\theta} = \frac{1}{2}\int_{-l}^{+l} cosl\theta dl,$$

мы получимъ вышенайденное выраженіе:

$$p_n = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{+l} dl\int_0^{\infty} cosl\theta d\theta.\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\varepsilon.\ cos\varepsilon^n\theta.\ \ d\varepsilon\right]^s = \int_{-l}^{+l} P_l\ dl.$$

Дифференціалъ $P_l dl$ означаетъ, какъ мы видѣли, безконечно малую вѣроятность суммы l; производную P_l можно поэтому назвать относительною вѣроятностію суммы l.

§ 9.

Для приближеннаго исчисленія P_l разложимъ $cos\varepsilon^n\theta$ въ рядъ

$$cos\ \ \varepsilon^n\theta = 1 - \frac{\varepsilon^{2n}\ \ \theta^2}{1.\ 2.} + \frac{\varepsilon^{4n}\ \ \theta^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{\varepsilon^{6n}\ \ \theta^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + \ldots$$

и положимъ вообще

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\varepsilon.\ \ \varepsilon^k.\ \ d\varepsilon = \mu_k;$$

мы уже видѣли, что количества μ_k суть средніе ариѳметическіе выводы изъ степеней погрѣшностей и что для нечетныхъ k имѣемъ вообще $\mu_k = 0$. Замѣняя $cos\ \varepsilon^n\theta$ его разложеніемъ получимъ

$$P_l = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[1 - \frac{\mu_{2n}\theta^2}{1\ \ 2} + \frac{\mu_{4n}\ \theta^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{\mu_{6n}\ \theta^6}{1.\ 2.\ 3\ \ 4.\ 5\ \ 6} + \ldots\ \right]^s cosl\theta\ \ d\theta;$$

предположимъ число s наблюденій столь большимъ, чтобы можно было пренебрегать членами дѣленными на s, и расположимъ исчисленіе такимъ образомъ, чтобы обнаружить въ выраженіи P_l подобнаго рода члены. Прежде всего преобразуемъ степень

$$\left[1 - \frac{\mu_{2n}\ \theta^2}{1\ \ 2} + \frac{\mu_{4n}\ \theta^4}{1\ \ 2.\ 3.\ 4} - \ldots\right]^s = \Theta^s$$

въ показательную функцію на основаніи уравненія:

$$\Theta^s = e^{slg\Theta};$$

разложивъ $lg\ \Theta$ въ рядъ, получимъ

$$P_l=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{s\mu_{2n}}{2}\theta^2}\, e^{-s\left[\frac{3\mu_{2n}^2-\mu_{4n}}{1.\,2.\,3.\,4}\theta^4+\frac{30\mu_{2n}^3-15\mu_{2n}\mu_{4n}+\mu_{6n}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}\theta^6+\dots\right]}\cos l\theta .\ d\theta$$

и возвращая снова вторую показательную функцію въ форму ряда:

$$P_l=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{s\mu_{2n}}{2}\theta^2}\cos l\theta\, d\theta-s\,A\int_0^\infty \theta^4 e^{-\frac{s\mu_{2n}}{2}\theta^2}\cos l\theta\, d\theta-s\,B\int_0^\infty \theta^6 e^{-\frac{s\mu_{2n}}{2}\theta^2}\cos l\theta\, d\theta+\dots,$$

гдѣ A, B.. суть коэффиціенты не зависящіе отъ s. Положимъ $\frac{s\mu_{2n}}{2}\theta^2=t^2$ и слѣдовательно $d\theta=dt.\sqrt{\frac{2}{s\mu_{2n}}}$, получимъ

$$P_l=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{s\mu_{2n}}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos\left(lt\sqrt{\frac{2}{s\mu_{2n}}}\right)dt-\frac{M}{s}-\frac{N}{s^2}+\dots;$$

Коэффиціенты M, N... выражаются очень просто помощію интеграловъ вида $\int_0^\infty \theta^n e^{-a\theta^2}d\theta$, но нѣтъ ни какой надобности раскрывать этихъ выраженій; безъ этого видно что они имѣютъ не болѣе какъ посредственную величину, поэтому мы можемъ при большомъ s откинуть члены $\frac{M}{s}$, $\frac{N}{s^2}$ и пр. тогда

$$P_l=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{s\mu_{2n}}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos\left(lt\sqrt{\frac{2}{s\mu_{2n}}}\right)dt$$

входящій сюда опредѣленный интегралъ равенъ (§ 5) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{l^2}{2s\mu_{2n}}}$

и потому

$$P_l=\frac{1}{\sqrt{2\pi s\mu_{2n}}}.\ e^{-\frac{l^2}{2s\mu_{2n}}}$$

Изъ этого выраженія мы можемъ заключить, что, согласно съ свойствами случайныхъ погрѣшностей, наивѣроятнѣйшая величина суммы нечетныхъ степеней погрѣшностей при большомъ числѣ наблюденій есть нуль. Если бы мы имѣли право допустить эту формулу для всякаго числа наблюденій, то, полагая въ ней $s=1$, получили бы относительную вѣроятность каждой погрѣшности

$$\varphi\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_{2n}}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon^{2n}}{2\mu_{2n}}},$$

что, какъ увидимъ ниже, для случая когда $n=1$, было доказано Гауссомъ на основаніи другихъ соображеній

Вставляя найденное выраженіе P_l въ величину p_n, получимъ

$$p_n = \int_{-l}^{+l} P_l\, dl = 2\int_0^l P_l\, dl = \sqrt{\frac{2}{\pi s\mu_{2n}}} \int_0^l e^{-\frac{l^2}{2s\mu_{2n}}}\, dl;$$

сдѣлаемъ

$$\frac{l^2}{2s\mu_{2n}} = t^2;\ l = t\sqrt{2s\mu_{2n}} \text{ и } dl = dt\sqrt{2s\mu_{2n}},$$

тогда выдетъ

$$p_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$$

Таково выраженіе вѣроятности, что $\Sigma\varepsilon_i^n$ не превосходитъ въ числовой величинѣ предѣла $l = t\sqrt{2s\mu_{2n}}$, или, что средняя величина $\frac{\Sigma\varepsilon_i^n}{s}$ не превосходитъ $\frac{t\sqrt{2\mu_{2n}}}{\sqrt{s}}$.

§ 10.

При посредственныхъ величинахъ t, напр. при $t=3, 4\ldots$, вѣроятность p_n становится чрезвычайно близкою въ достовѣрности и мы можемъ быть вполнѣ увѣрены что $\frac{\Sigma\varepsilon_i^n}{s}$ не превзойдетъ предѣла $\frac{4\sqrt{2\mu_{2n}}}{\sqrt{s}}$. Мы видимъ, что величина этого предѣла будетъ тѣмъ менѣе и слѣдовательно предположеніе $\Sigma\varepsilon_i^n = 0$ тѣмъ благонадежнѣе, чѣмъ болѣе число наблюденій и чѣмъ менѣе средняя величина μ_{2n}. При $n=1$ получаемъ вѣроятность

$$p_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-t^2} dt,$$

что погрѣшность ариѳметическаго вывода $\frac{\Sigma\varepsilon_i}{s}$ не превзойдетъ предѣла $\frac{t\sqrt{2\mu_2}}{\sqrt{s}}$. Такъ какъ погрѣшности наблюденій бываютъ обыкновенно очень малыя величины, то вообще $\mu_{2n} < \mu_2$, слѣдовательно съ большею выгодою можно бы было опредѣлять неизвѣстныя изъ непосредственныхъ наблюденій на основаніи предположеній $\Sigma\varepsilon_i^n = 0$ при n большихъ единицы, но мы уже замѣтили, что это приводитъ къ невыполнимымъ исчисленіямъ Изъ таблицъ интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\ }}\int_0^t e^{-t^2}dt$$

помощію интерполированія находимъ, что этотъ интегралъ равенъ $^1/_2$, когда $t = 0,47694$; слѣд. съ одинаковою вѣроятностію можемъ ожидать, что погрѣшность ариѳметическаго вывода будетъ больше или меньше

$$r = 0,47694.\ \sqrt{2}.\ \sqrt{\frac{\mu_2}{s}} = 0.67449.\sqrt{\frac{\mu_2}{s}};$$

величину r называютъ *вѣроятною ошибкою*. Для всякой величины вѣроятности p_1, погрѣшность ариѳметическаго вывода обратно пропорціональна квадратному корню изъ числа наблюденій и прямо пропорціональна количеству $\sqrt{\mu_2}$, которое Гауссъ назвалъ *среднею ошибкою*. Когда способы наблюденій весьма точны, то ошибки бываютъ очень малы, слѣд. и средняя ошибка есть очень малая величина; если притомъ произведено значительное число *наблюденій*, то *наибольшая возможная* погрѣшность ариѳметическаго вывода $\frac{t\sqrt{2\mu_2}}{\sqrt{s}}$ даже при t равномъ 3 или 4 весьма незначительна и въ этомъ случаѣ мы можемъ съ достовѣрностію полагать, что дѣйствительная погрѣшность будетъ менѣе этой величины; слѣд. сочетаніе непосредственныхъ наблюденій по правилу ариѳметической среды освобождаетъ результатъ отъ вліянія случайныхъ измѣненій тѣмъ въ большей мѣрѣ, чѣмъ точнѣе способы наблюденій и чѣмъ болѣе число ихъ

Средняя ошибка $\sqrt{\mu_2}$ и вообще среднія величины μ_{2n} могутъ быть приблизительно вычислены изъ такихъ наблюденій, дѣйствительныя погрѣшности которыхъ извѣстны. При достаточномъ числѣ такихъ наблюденій можно интегралъ

$$\mu_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon.\ \varepsilon^{2n}d\varepsilon$$

замѣнить суммою

$$\frac{\varepsilon_1^{\ 2n} + \varepsilon_2^{\ 2n} + \ldots + \varepsilon_s^{\ 2n}}{s} = \frac{\Sigma\varepsilon_i^{\ 2n}}{s}.$$

Чтобы судить о томъ, какой погрѣшности можно ожидать отъ такого замѣненія, рѣшимъ вопросъ подобный предыдущему: опредѣлимъ вѣроятность, что сумма четныхъ степеней погрѣшностей не выходитъ изъ данныхъ предѣловъ. Если возмемъ для показателя степени погрѣшности вообще цѣлое число n, то въ этомъ вопросѣ будетъ заключаться также другой, относящійся къ нечетнымъ значеніямъ n, именно опредѣленіе вѣроятности, что сумма нечетныхъ степеней погрѣшностей, взятыхъ съ одинакимъ знакомъ, не превышаетъ даннаго предѣла.

§ 11.

Вѣроятная величина суммы четныхъ степеней погрѣшностей, или нечетныхъ взятыхъ съ одинакимъ знакомъ, безъ сомнѣнія не будетъ нуль; поэтому возмемъ интегралъ

$$p'_n = \iiint \ldots \varphi\varepsilon_1\, \varphi\varepsilon_2 \ldots \varphi\varepsilon_s .\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_s$$

между такими предѣлами, для которыхъ сумма $\varepsilon_1{}^n + \varepsilon_2{}^n + \ldots + \varepsilon_s{}^n$, члены которой взяты существенно положительными, не выходитъ изъ предѣловъ $S_n \pm l$. Къ рѣшенію этого вопроса можно примѣнить формулу (§ 6).

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+g)\alpha i} d\alpha \iiint_{-\infty}^{+\infty} \ldots \Phi .\, e^{f\alpha i}\; dz_1\, dz_2 \ldots dz_s$$

Въ нашемъ случаѣ l имѣетъ очевидно тоже значеніе, какъ и въ этой формулѣ; $g = S_n$; $f = \varepsilon_1{}^n + \varepsilon_2{}^n + \ldots + \varepsilon_s{}^n$ и слѣд.

$$p'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(S_n + y)\alpha i} d\alpha \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon\, e^{\varepsilon^n \alpha i} d\varepsilon \right]^s = \int_{-l}^{+l} P_y\, dy;$$

величина $P_y\, dy$ означаетъ очевидно вѣроятность, что сумма $\varepsilon_1{}^n + \varepsilon_2{}^n + \ldots + \varepsilon_s{}^n$ равна именно числу $S_n + y$ и P_y есть относительная вѣроятность такого предположенія. Означимъ для краткости $S_n + y$ черезъ L и сдѣлаемъ приближенное исчисленіе P_y, пренебрегая членами дѣленными на очень большое число наблюденій s. Разложимъ въ рядъ функцію $e^{\varepsilon^n \alpha i}$ и означимъ для нечетнаго n интегралъ $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon .\, \varepsilon^n d\varepsilon$, въ которомъ, по условію, ε^n для всѣхъ величинъ ε взято съ положительнымъ знакомъ, черезъ μ_n; т. е. положимъ

$$\mu_n = 2 \int_0^{\infty} \varepsilon^n\, \varphi\varepsilon d\varepsilon;$$

эта величина μ_n для нечетнаго n будетъ отлична отъ введеннаго прежде обозначенія ея, при которомъ μ_n было всегда равно нулю. Такимъ образомъ получимъ

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-L\alpha i} \left[1 + \mu_n \alpha i - \mu_{2n} \frac{\alpha^2}{2} - \mu_{3n} \frac{\alpha^3}{6} .\, i + \ldots \right]^s d\alpha;$$

обращая степень ряда въ показательную функцію и довольствуясь въ показателѣ второю степенью α, а остальныя члены обращая снова въ рядъ, найдемъ

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-L\alpha i + s\mu_n \alpha i - s(\mu_{2n} - \mu_n{}^2)\frac{\alpha^2}{2}} \left[1 + s\, A\, \alpha^3 i + s\, B\alpha^4 + \ldots \right] d\alpha,$$

гдѣ A, B... суть коэффиціенты не зависящіе отъ s

$$P_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(s\mu_n - L)\alpha i - s(\mu_{2n} - \mu_n^2)\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha + \frac{si}{2\pi} A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(s\mu_n - L)\alpha i - s(\mu_{2n} - \mu_n^2)\frac{\alpha^2}{2}} \alpha^3 d\alpha + \ldots$$

Дополняя показателя при e до полнаго квадрата, найдемъ

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{(L - s\mu_n)^2}{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\alpha\sqrt{\frac{s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}{2}} + \frac{(L - s\mu_n)}{\sqrt{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}}\right]^2} d\alpha + s A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{td}\alpha^3 d\alpha + \ldots;$$

если подставимъ на мѣсто показателя при e подъ интеграломъ величину $-t^2$, то будетъ

$$d\alpha = dt. \sqrt{\frac{2}{s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}}$$

и мы получимъ:

$$P_y = \frac{1}{\pi\sqrt{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} e^{-\frac{(L - s\mu_n)^2}{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \frac{M}{s} + \frac{N}{s^2} + \ldots$$

Отбрасывая члены $\frac{M}{s}, \frac{N}{s^2}$ и пр. и замѣнивъ интегралъ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ его величиною $\sqrt{}$, получимъ наконецъ вставляя величину L:

$$P_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} \cdot e^{-\frac{(y + S_n - s\mu_n)^2}{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}}$$

Изъ этого выраженія видно, что вѣроятнѣйшая величина суммы $S_n + y = \Sigma\varepsilon_i^n$ есть $s\mu_n$, слѣдовательно вѣроятнѣйшая величина $\frac{\Sigma\varepsilon_i^n}{s}$ есть μ_n. Мы означали черезъ S_n какую нибудь данную величину; положивъ теперь $S_n = s\mu_n$, найдемъ для вѣроятности, что $\Sigma\varepsilon_i^n$ равна $s\mu_n + y$, выраженіе

$$P'_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}}.$$

Вѣроятность p'_n, что сумма $\Sigma\varepsilon_i^n$ заключается между предѣлами $s\mu_n \pm l$, будетъ тогда

$$p'_n = \int_{-l}^{+l} P'_y dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} \int_{-l}^{+l} e^{-\frac{y^2}{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} dy$$

или

$$p'_n = \sqrt{\frac{2}{\pi s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} \int_0^l e^{-\frac{y^2}{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} dy$$

Если сдѣлаемъ $\frac{y}{\sqrt{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} = t$, то получимъ вѣроятность

$$p'_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt,$$

что сумма $\Sigma \varepsilon_i^n$ не выходитъ изъ предѣловъ $s\mu_n \pm t\sqrt{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}$, или, что величина $\frac{\Sigma\varepsilon_i^n}{s}$ остается въ предѣлахъ

$$\mu_n \pm t\sqrt{\frac{2}{s}(\mu_{2n} - \mu_n^2)} = \mu_n \left[1 \pm t\sqrt{\frac{2}{s}\left(\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2} - 1\right)}\right]$$

Съ вѣроятностію, равной половинѣ, можемъ мы слѣдовательно предполагать, что погрѣшность, происходящая при замѣненіи интеграла μ_n суммою $\frac{\Sigma\varepsilon_i^n}{s}$, не превзойдетъ

$$\pm 0{,}47694 \sqrt{\frac{2}{s}(\mu_{2n} - \mu_n^2)},$$

и почти достовѣрно, что эта погрѣшность менѣе $3\sqrt{\frac{2}{s}(\mu_{2n} - \mu^2_n)}$. При очень большомъ числѣ наблюденій $\sqrt{\frac{2}{s}(\mu_{2n} - \mu^2_n)}$ имѣетъ чрезвычайно малую величину и интегралъ μ_n очень мало будетъ разниться отъ $\frac{\Sigma\varepsilon_i^n}{s}$.

Такимъ образомъ средняя ошибка $\sqrt{\mu_2}$, отъ которой зависитъ опредѣленіе точности ариѳметическаго вывода можетъ быть вычислена изъ наблюденій, которыхъ погрѣшности извѣстны, и величина ея съ вѣроятностію равной половинѣ будетъ заключаться между предѣлами

$$\sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{s}} \cdot \left[1 \pm 0{,}47694\sqrt{\frac{2}{s}\left(\frac{\mu_4}{\mu^2_2} - 1\right)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

или приближенно

$$\sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{s}} \cdot \left[1 \pm \frac{0{,}67449}{\Sigma\varepsilon_i^2}\sqrt{\Sigma\varepsilon_i^4 - \frac{(\Sigma\varepsilon_i^2)^2}{s}}\right].$$

§ 12.

Предположимъ, что между количествами $a_1, a_2 \dots a_s$, найденными изъ s наблюденій равнаго достоинства для неизвѣстной x, оказалось p_1 равныхъ a_1, p_2 равныхъ a_2 и т. д., тогда средній ариѳметическій выводъ

$$\xi_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_s}{s} = \frac{\Sigma^s{}_1 a_i}{s}$$

обратится въ

$$\xi_1 = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots}{p_1 + p_2 + \dots} = \frac{\Sigma p_i a_i}{\Sigma p_i}$$

Такой видъ ариѳметическаго вывода доставляетъ намъ возможность распространить правило ариѳметической среды на тотъ случай, когда наблюденія, непосредственно опредѣляющія величину x, не одинаковаго достоинства. Мы видѣли, что для наблюденій равнаго достоинства благонадежность результата возрастаетъ вмѣстѣ съ числомъ наблюденій; слѣд. повторяя наблюденіе меньшаго достоинства достаточное число разъ, мы можемъ достигнуть до столь же благонадежнаго результата, какъ и тотъ, который полученъ съ помощію болѣе точнаго способа наблюденій; такъ что, можно всѣ наблюденія привести къ одной мѣрѣ благонадежности, замѣняя результаты лучшихъ наблюденій большимъ, а результаты худшихъ наблюденій меньшимъ числомъ наблюденій извѣстнаго достоинства т. е. умножая каждый результатъ на число, выражающее его относительное достоинство; по правилу ариѳметической среды найдемъ тогда:

$$\xi_1 = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots}{p_1 + p_2 + \dots} = \frac{\Sigma p_i a_i}{\Sigma p_i},$$

гдѣ коэффиціенты p_i суть числа пропорціональныя достоинствамъ каждаго опредѣленія a_i въ сказанномъ смыслѣ. По сходству выраженія ξ_1 съ разстояніемъ отъ нѣкоторой плоскости центра тяжести вѣсовъ p_i, помѣщенныхъ на разстояніяхъ a_i отъ той же плоскости, множители p_i называются вѣсами опредѣленій a_i, или вѣсами соотвѣтствующихъ имъ способовъ наблюденій. Вѣсъ ариѳметическаго вывода ξ_1 равенъ очевидно Σp_i, т. е. суммѣ вѣсовъ отдѣльныхъ опредѣленій. Вѣсы суть числа относительныя и могутъ быть выражены въ произвольныхъ единицахъ, потому что количество ξ_1 не измѣняется отъ помноженія всѣхъ p_i на произвольнаго постояннаго множителя.

§ 13

Мы уже видѣли, что довѣріе къ ариѳметическому выводу, кромѣ числа наблюденій, зависитъ еще отъ средней ошибки наблюденій $m = \sqrt{\mu_2}$. Чтобы найти соотношеніе между вѣсомъ и среднею ошибкою, положимъ, что p_1 есть вѣсъ вывода извлеченнаго изъ s_1 одинаковаго достоинства наблюденій, имѣющихъ среднюю ошибку m_1; p_2 вѣсъ другаго вывода изъ s_2 наблюденій съ среднею ошибкою m_2 и т. д. Если назовемъ черезъ $\sigma_1, \sigma_2 \dots$ числа наблюденій равнаго достоинства т. е. имѣющихъ общую среднюю ошибку μ, необходимыя для того, чтобы выведенные результаты имѣли одинаковую степень точности или одинаковую вѣроятность, то изъ понятія о вѣсахъ имѣемъ:

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots = \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \ldots$$

Погрѣшность перваго ряда наблюденій для всякой данной вѣроятности пропорціональна $\frac{m_1}{\sqrt{s_1}}$; чтобы изъ числа σ_1 получить выводъ съ такою же вѣроятностію необходимо имѣть

$$\frac{m_1}{\sqrt{s_1}} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma_1}}$$

Для другихъ наблюденій точно также получимъ

$$\frac{m_2}{\sqrt{s_2}} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma_2}};\ \frac{m_3}{\sqrt{s_3}} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma_3}} \text{ и пр.}$$

опредѣляя изъ этихъ равенствъ величины σ, получимъ

$$\sigma_1 = \mu^2 \frac{s_1}{m_1^2};\ \sigma_2 = \mu^2 \frac{s_2}{m_2^2};\ \sigma_3 = \mu^2 \frac{s_3}{m_3^2} \text{ и т. д.}$$

и слѣдовательно

$$p_1 : p_2 : p_3 : = \ldots = \frac{s_1}{m_1^2} : \frac{s_2}{m_2^2} : \frac{s_3}{m_3^2} : \ldots$$

т. е. вѣсы пропорціональны числамъ наблюденій и обратно пропорціональны квадратамъ ихъ среднихъ погрѣшностей.

Такимъ образомъ наивыгоднѣйшее опредѣленіе неизвѣстной x изъ уравненій

$$x = a_1,\ x = a_2, \ldots\ x = a_s$$

полученныхъ помощію непосредственныхъ наблюденій, которыхъ относительныя достоинства выражены вѣсами p_1, $p_2 \ldots p_s$, будетъ

$$\xi_1 = \frac{\Sigma p_i a_i}{\Sigma p_i}$$

Чтобы этотъ средній выводъ давалъ точную величину неизвѣстной необходимо

$$\Sigma p_i \varepsilon_i = 0$$

и такое предположеніе по ходу приведеннаго доказательства имѣетъ дѣйствительно вѣроятность неопредѣленно возрастающую съ числомъ наблюденій.

§ 14.

Вѣсъ p и средняя ошибка m каждаго наблюденія суть величины постоянныя для извѣстнаго способа наблюденій. Ихъ опредѣляютъ, прилагая способъ наблюденія освобожденный отъ постоянныхъ погрѣшностей, къ измѣренію точно извѣстной величины и повторяя такое измѣреніе очень большое число разъ. Тогда будутъ извѣстны дѣйствительныя случайныя погрѣшности ε_i; онѣ будутъ приблизительно удовлетворять всѣмъ свойствамъ, приписываемымъ нами случайнымъ погрѣшностямъ.

Средняя ошибка получится, какъ мы видѣли, весьма приближенно, если замѣнимъ интегралъ μ_2 суммою $\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{s}$ и мы будемъ имѣть $m=\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{s}}$; вѣсъ p опредѣлится изъ уравненія

$$p = k\frac{s}{m^2}$$

гдѣ k есть произвольный коэффиціентъ, выборъ котораго позволитъ вѣсы различныхъ наблюденій выразить въ простѣйшихъ числахъ, напр. освободить ихъ отъ дробей и т. п.

§ 15.

Такимъ образомъ мы распространили правило ариѳметической среды, доказанное для непосредственныхъ однородныхъ наблюденій, на случай наблюденій не одинаковаго достоинства; перейдемъ теперь къ изысканію наивыгоднѣйшаго сочетанія наблюденій въ томъ случаѣ, когда изъ наблюденій опредѣляется не сама неизвѣстная величина, а какая нибудь функція ея.

Положимъ что помощію равно хорошихъ наблюденій найдены были величины A_1, $A_2 \dots A_s$ для функцій $F_1(X)$, $F_2(X)$, $\dots F_s(X)$ неизвѣстной X, такъ что, называя черезъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_s$ случайныя погрѣшности наблюденій, мы имѣемъ s уравненій вида

$$F_i(X) - A_i = \varepsilon_i.$$

Чтобы придать этимъ уравненіямъ одинаковый и притомъ простѣйшій видъ, допустимъ, что для неизвѣстной X извѣстна такая приближенная величина X_0, что можно, положивъ $X = X_0 + x$, пренебрегать второю и высшими степенями поправки x; тогда, подставляя $X_0 + x$ вмѣсто X въ найденныя изъ наблюденій уравненія, получимъ

$$F_i(X_0 + x) - A_i = F_i(X_0) + xF'_i(X_0) - A_i = \varepsilon_i$$

или, полагая $F'_i(X_0) = a_i$ и $A_i - F_i(X_0) = \omega_i$,

$$a_i x - \omega_i = \varepsilon_i.$$

§ 16.

Случайная погрѣшность наблюденія вообще не зависитъ отъ того, большую или меньшую величину опредѣляемъ мы помощію этого наблюденія; такъ что, если бы мы вмѣсто величины $a_i x$ при совершенно тѣхъ же случайныхъ обстоятельствахъ наблюдали величину x, или всякую другую величину, то получили бы туже случайную погрѣшность ε_i. Но, опредѣляя x изъ уравненія

$$a_i x - \omega_i = \varepsilon_i,$$

мы находимъ $\frac{\omega_i}{a_i}$ съ погрѣшностію $\frac{\varepsilon_i}{a_i}$; слѣдовательно опредѣленіе x изъ наблюденій, помощію которыхъ измѣряется величина $a_i x$, выходитъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ болѣе коэффиціентъ a_i. Если средняя ошибка наблюденія, опредѣляющаго непосредственно величину x будетъ m, то

въ опредѣленія x изъ такихъ же наблюденій, но приложенныхъ къ измѣренію $a_i x$, мы должны слѣд. подозрѣвать среднюю ошибку $\frac{m}{a_i}$, потому что всѣ случайныя погрѣшности будутъ въ этомъ случаѣ имѣть видъ $\frac{\varepsilon}{a_i}$. Такъ какъ вѣсъ обратно пропорціоналенъ квадрату средней погрѣшности, то изъ предыдущаго мы заключаемъ, что уравненію

$$x - \frac{\omega_i}{a_i} = \frac{\varepsilon_i}{a_i}$$

должно приписать вѣсъ a_i^2, т. е. для наивыгоднѣйшаго опредѣленія x изъ такихъ уравненій должно удовлетворить условію

$$\Sigma\, a_i^2 \frac{\varepsilon_i}{a_i} = 0 \text{ или } \Sigma\, a\, \varepsilon_i = 0,$$

откуда, замѣнивъ ε_i ея величиною $a_i x - \omega_i$, получаемъ

$$\xi_1\, \Sigma\, a_i^2 - \Sigma\, a_i \omega_i = 0$$

и наивыгоднѣйшая величина x будетъ

$$\xi_1 = \frac{\Sigma a_i \omega_i}{\Sigma a_i^2}.$$

Вѣсъ этого средняго вывода, равный суммѣ вѣсовъ отдѣльныхъ уравненій, будетъ Σa_i^2.

Полагая всѣ a_i равными единицѣ, мы возвращаемся къ простому ариѳметическому выводу

$$\xi_1 = \frac{\Sigma\, \omega_i}{s}.$$

Если всѣ a_i равны одной и той же величинѣ k, то получится выводъ

$$\xi_1 = \frac{\Sigma\, \omega_i}{ks}$$

и будетъ очевидно означать ариѳметическую среду непосредственныхъ измѣреній величины kx т. е.

$$k\xi_1 = \frac{\Sigma\, \omega_i}{s}.$$

Когда наблюденія опредѣляющія функціи $a_i x - \omega_i$ не одинаковаго достоинства, то называя ихъ вѣсы черезъ p_i получимъ для наивыгоднѣйшаго результата

$$\xi_1 = \frac{\Sigma\, p_i a_i \omega_i}{\Sigma\, p_i a_i^2}.$$

Легко видѣть, что уравненіе

$$\Sigma\, a_i\, \varepsilon_i = 0$$

выражаетъ условіе наименьшей величины суммы квадратовъ погрѣшностей; возмемъ производную отъ ε_i изъ уравненія $\varepsilon_i = a_i x - \omega_i$; будемъ имѣть:

$$a_i = \frac{d\varepsilon_i}{dx}$$

и слѣдовательно

$$\Sigma a_i \varepsilon_i = \Sigma \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx} = 0;$$

такъ какъ это есть производная отъ $\frac{1}{2} \Sigma \varepsilon_i^2$ и притомъ вторая производная этой функціи равна положительной величинѣ Σa_i^2, то уравненіе $\Sigma a_i \varepsilon_i = 0$ есть условіе наименьшей величины суммы квадратовъ $\Sigma \varepsilon_i^2$; отъ этого свойства наивыгоднѣйшаго результата взято для сочетанія наблюденій названіе *способа наименьшихъ квадратовъ.*

§ 17.

Условіе наименьшей величины суммы квадратовъ погрѣшностей приводитъ также къ наивыгоднѣйшимъ опредѣленіямъ неизвѣстныхъ и въ томъ случаѣ, когда наблюденія даютъ величины функцій многихъ неизвѣстныхъ. Если подобно прежнему дадимъ функціямъ линейный видъ и черезъ $x_1, x_2, x_3 \ldots$ означимъ поправки неизвѣстныхъ, то всѣ уравненія, полученныя изъ наблюденій будутъ имѣть видъ

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + a_{i,3} x_3 + \ldots - \omega_i = \varepsilon_i,$$

гдѣ въ коэффиціентѣ $a_{i,k}$ первый указатель относится къ порядку наблюденій или уравненій, а второй къ порядку неизвѣстныхъ. На основаніи предыдущаго, величина x_1, каковы бы ни были прочія неизвѣстныя $x_2, x_3 \ldots$, опредѣлится самымъ выгоднымъ образомъ подъ условіемъ

$$\Sigma a_{i,1} \varepsilon_i = 0;$$

такъ какъ тоже самое мы должны сказать и о x_2 и о x_3 и пр., то для наивыгоднѣйшаго опредѣленія неизвѣстныхъ должно въ одно время удовлетворить уравненіямъ:

$$\Sigma a_{i,1} \varepsilon_i = 0; \ \Sigma a_{i,2} \varepsilon_i = 0; \ \Sigma a_{i,3} \varepsilon_i = 0 \text{ и т. д.}$$

число такихъ уравненій равно числу неизвѣстныхъ и потому совершенно достаточно для ихъ опредѣленія. Коэффиціенты $a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3} \ldots$ суть частныя производныя ε_i относительно соотвѣтствующихъ неизвѣстныхъ $x_1, x_2, x_3 \ldots$, слѣд. предыдущія уравненія обращаются въ

$$\Sigma \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = 0; \ \Sigma \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = 0, \ \Sigma \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_3} = 0 \text{ и т. д.}$$

и всѣ вмѣстѣ выразятъ условіе наименьшей величины суммы квадратовъ погрѣшностей $\Sigma \varepsilon_i^2$. Въ случаѣ наблюденій разнородныхъ, вѣсы которыхъ суть p_i эти уравненія обратятся въ уравненія вида

$$\Sigma p_i \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_k} = 0$$

и выразятъ вмѣстѣ условіе наименьшей величины функціи $\Sigma p_i \varepsilon_i^2$.

Мы сдѣлали здѣсь эти краткія, предварительныя замѣчанія о способѣ наименьшихъ квадратовъ для того, чтобы показать тѣсную связь этого способа съ правиломъ ариѳметической среды. Ходъ умозаключеній, помощію котораго мы уяснили эту связь, можетъ служить элементарнымъ доказательствомъ способа наименьшихъ квадратовъ.

ГЛАВА II.

Историческія замѣчанія. — Правило Лежандра. — Частная теорія Гаусса. — Опредѣленіе мѣры точности наблюденій. — Вѣсы выводовъ. — Общая теорія Гаусса. — Лапласово доказательство способа наименьшихъ квадратовъ.

§ 18.

Необходимость общаго способа для изысканія наивыгоднѣйшихъ результатовъ высказывается ясно, когда изъ наблюденій для исчисленія поправокъ x_1, x_2.. x_n неизвѣстныхъ X_1, X_2... X_n получаются уравненія вида

$$a_{i,1}, \ x_1 + a_{i,2} \ x_2 + \dots + a_{i,n} \ x_n - \omega_i = 0$$

и когда число s этихъ уравненій, обыкновенно очень большое, превосходитъ число неизвѣстныхъ. Эти уравненія неспособны удовлетворяться въ точности никакими величинами x_1, x_2... x_n, потому что количества ω_i, входящія въ нихъ, выведены изъ наблюденій и потому подвержены необходимо погрѣшностямъ. При составленіи n уравненій необходимыхъ для опредѣленія n неизвѣстныхъ x_1, x_2... x_s должно очевидно пользоваться всѣми уравненіями, полученными изъ наблюденій, потому что мы не имѣемъ причины предпочитать одни изъ нихъ передъ другими и потому что, принимая въ расчетъ большее число данныхъ, мы можемъ надѣяться получить болѣе точные результаты. Вопросъ состоитъ въ томъ, какой способъ составленія будетъ самый выгодный? Не зная совершенно истинныхъ величинъ неизвѣстныхъ мы должны очевидно признать самымъ выгоднымъ такое сочетаніе данныхъ уравненій, при которомъ вѣроятныя погрѣшности неизвѣстныхъ имѣютъ по возможности малую величину.

§ 19.

До начала нынѣшняго столѣтія не существовало общаго способа для опредѣленія неизвѣстныхъ изъ многочисленныхъ уравненій, получаемыхъ помощію наблюденій. Между различными частными пріемами, употреблявшимися въ прежнее время извѣстнѣе другихъ *méthode de situations* и *правило Котеса*.

По первому изъ этихъ способовъ наивыгоднѣйшимъ считались такія величины неизвѣстныхъ, подстановка которыхъ въ данныя уравненія вида

$$a_{i,1} \ x_1 + a_{i,2} \ x_2 + \dots + a_{i,n} \, x_n - \omega_i = 0.$$

обращая вторыя части этихъ уравненій въ нѣкоторыя количества ε_i, давала бы для наибольшей изъ ε_i величину, меньшую нежели подстановка всякихъ другихъ величинъ; но для изы-

сканія неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ такому условію, не было никакого общаго правила. Лапласъ, изслѣдуя этотъ способъ, замѣчаетъ, что результаты его должны быть всегда очень близки къ результатамъ способа наименьшихъ квадратовъ и что слѣдовательно последній способъ выгодно употреблять и въ этомъ отношеніи.

Котесъ первый обратилъ вниманіе на то, что въ составъ результата должны входить всѣ наблюденія, пропорціонально ихъ вліянію. Правило Котеса относится къ опредѣленію только одной неизвѣстной. Если назовемъ черезъ Δx погрѣшность вывода, взятаго изъ отдѣльнаго наблюденія

$$a_i x - \omega_i = 0,$$

то погрѣшность наблюденія ε_i будетъ имѣть величину $a_i \Delta x$; изъ этого видно, что поправка Δx будетъ при извѣстной погрѣшности тѣмъ меньше, чѣмъ больше коэффиціентъ a_i и Котесъ принимаетъ a_i за мѣру вліянія наблюденія i на величину x. Выражая различныя величины

$$x_i = \frac{\omega_i}{a_i}$$

длинами отложенными по одной прямой линіи отъ общаго начала и помѣщая въ концѣ каждой длины вѣсъ, пропорціональный соотвѣтствующему коэффиціенту a_i, наивыгоднѣйшее опредѣленіе x, по правилу Котеса, будетъ разстояніе центра тяжести этой системы вѣсовъ отъ общаго начала т. е. будетъ

$$\xi = \frac{\Sigma a_i x_i}{\Sigma a_i} = \frac{\Sigma \omega_i}{\Sigma a_i}$$

Легко видѣть, что этотъ средній выводъ есть просто ариѳметическая среда уравненій $a_i x - \omega_i = \varepsilon_i$, предполагая, что они имѣютъ одинаковый вѣсъ; въ самомъ дѣлѣ тогда $\Sigma \varepsilon_i = 0$ и мы имѣемъ

$$x \Sigma a_i = \Sigma \omega_i \text{ или } x = \frac{\Sigma \omega_i}{\Sigma a_i}$$

Правило Котеса очень просто и приводитъ къ довольно точнымъ результатамъ: имъ пользовались Эйлеръ и Тобіасъ Майеръ, извѣстный своими таблицами луны, замѣчательными по точности для того времени; важное неудобство этого правила состоитъ въ томъ, что оно вовсе не приложимо къ сочетанію уравненій, содержащихъ болѣе одной неизвѣстной.

§ 20.

Въ 1806 году Лежандръ въ своемъ сочиненіи «*Nouvelles méthodes pour la determination des orbites des comètes*» предложилъ для сочетанія уравненій способъ наименьшихъ квадратовъ. Удовлетворяя условіямъ наименьшей величины $\Sigma\varepsilon_i^2$; должно опредѣлить неизвѣстныя изъ уравненій

$$\Sigma\varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = 0;\ \Sigma\varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = 0 \ldots \Sigma\varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_n} = 0.$$

число которыхъ всегда равно числу неизвѣстныхъ. Составленіе такихъ выводныхъ уравненій очень просто: подставляя вмѣсто ε_i ея величину $\frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = a_{i,1}$ мы видимъ что для состав-

ленія перваго уравненія $\Sigma\varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = 0$ нужно всѣ данныя уравненія, помноженныя каждое на свой коэффиціентъ при x_1 сложить и сумму приравнять нулю; тогда получится:

$$x_1 \Sigma a_{i,1}^2 + x_2 \Sigma a_{i,1} . a_{i,2} + \dots + x_n \Sigma a_{i,1} a_{i,n} - \Sigma a_{i,1} \omega_i = 0$$

Совершенно такимъ же образомъ прочія уравненія $\Sigma\varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} \dots \Sigma\varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_n}$ обратятся въ

$$x_1 \Sigma a_{i,2} . a_{i,1} + x_2 \Sigma a_{i,2}^2 + \dots + x_n \Sigma a_{i,2} a_{i,n} - \Sigma a_{i,2} \omega_i = 0$$

. . . .

$$x_1 \Sigma a_{i,n} a_{i,1} + x_2 \Sigma a_{i,n} . a_{i,2} + \dots + x_n \Sigma a_{i,n}^2 - \Sigma a_{i,n} \omega_i = 0$$

Лежандръ не далъ собственно доказательства, что величины x_1, $x_2 \dots x_n$ опредѣленныя изъ такихъ уравненій благонадежнѣе другихъ: онъ показалъ только, что въ случаѣ одной неизвѣстной и коэффиціентовъ $a_{i,1}$ равныхъ единицамъ этотъ способъ приводитъ къ общеупотребительному правилу ариѳметической среды; способъ наименьшихъ квадратовъ былъ предложенъ имъ главнымъ образомъ, какъ очень простое и вмѣстѣ съ тѣмъ совершенно общее средство устранить неопредѣленность въ рѣшеніи уравненій, получаемыхъ изъ наблюденій.

§ 21.

Между тѣмъ Гауссъ, независимо отъ Лежандра, еще съ 1795 года употреблялъ въ своихъ вычисленіяхъ тотъ же самый способъ и сообщалъ объ немъ изустно нѣкоторымъ ученымъ. Въ 1809 году вышло въ свѣтъ его знаменитое сочиненіе «*Theoria motus corporum coelestium*»: въ немъ Гауссъ помѣстилъ первое доказательство способа наименьшихъ квадратовъ и предложилъ способы *для* исчисленія не только наивыгоднѣйшихъ результатовъ, но и относительной благонадежности ихъ. Изящное доказательство Гаусса, основанное на допущеніи правила ариѳметической среды, важно особенно потому, что въ немъ въ первый разъ вопросъ о наблюденіяхъ внесенъ въ область Теоріи Вѣроятностей.

Назовемъ по прежнему черезъ ε_i случайныя погрѣшности наблюденій и черезъ $\varphi_i\varepsilon_i$ ихъ относительныя вѣроятности, законъ которыхъ мы предположимъ различнымъ *для* различныхъ способовъ наблюденій. Вѣроятность при s наблюденіяхъ получить извѣстную систему погрѣшностей выразится произведеніемъ $\varphi_1\varepsilon_1 . \varphi_2\varepsilon_2 \dots \varphi_i\varepsilon_i \dots \varphi_s\varepsilon_s$. Не зная дѣйствительныхъ погрѣшностей, мы должны считать самыми вѣроятными такія величины неизвѣстныхъ, которыя соотвѣтствуютъ самымъ вѣроятнымъ величинамъ ε_i, т. е. опредѣлить ихъ подъ условіемъ, что $\varphi_1\varepsilon_1 . \varphi_2\varepsilon_2 \dots \varphi_s\varepsilon_s$ имѣетъ наибольшую величину. Возмемъ производныя отъ логориѳма этого произведенія относительно неизвѣстныхъ величинъ $x_1, x_2 \dots x_n$, тогда условіе наибольшей величины выразится уравненіями

$$\sum \frac{\varphi'_i \varepsilon_i}{\varphi_i \varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = 0; \sum \frac{\varphi'_i \varepsilon_i}{\varphi_i \varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = 0 \dots \sum \frac{\varphi'_i \varepsilon_i}{\varphi_i \varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{dx_n} = 0,$$

которыя и должны служить для опредѣленія наивыгоднѣйшихъ величинъ $x_1, x_2 \dots x_n$; но для этого нужно знать видъ функціи $\varphi_i\varepsilon_i$. Гауссъ опредѣляетъ его, допуская бездоказательно для непосредственныхъ одного рода наблюденій одной неизвѣстной уравненіе $\Sigma\varepsilon_i = 0$, т. е.

правило ариѳметической среды. Разсматривая одну неизвѣстную x_1 и коэффиціентъ при ней равнымъ единицѣ, мы имѣемъ $\frac{d\varepsilon_i}{dx_1}=1$; $\frac{d\varepsilon_i}{dx_2}=0\ldots\frac{d\varepsilon_i}{dx_n}=0$ и кромѣ того для однородныхъ наблюденій $\varphi_1\,\varepsilon=\varphi_2\,\varepsilon=\ldots=\varphi_s\,\varepsilon$; изъ всѣхъ уравненій остается въ такомъ случаѣ одно

$$\sum\frac{\varphi'\,\varepsilon_i}{\varphi\varepsilon_i}=0$$

которое должно быть удовлетворено въ одно время съ уравненіемъ

$$\Sigma\,\varepsilon_i=0$$

Соединяя оба эти уравненія въ одно, мы имѣемъ

$$\sum\left(\frac{\varphi'\,\varepsilon_i}{\varphi\varepsilon_i}+\lambda\varepsilon_i\right)=0,$$

гдѣ λ есть произвольный коэффиціентъ. Это уравненіе должно оставаться справедливымъ каково бы ни было число наблюденій, т. е. оно не должно измѣняться если къ суммѣ прибавимъ, или отнимемъ отъ нея нѣсколько подобныхъ же членовъ; слѣд. необходимо имѣемъ вообще для всякаго i

$$\frac{\varphi'\,\varepsilon_i}{\varphi\varepsilon_i}+\lambda\varepsilon_i=0,$$

или просто

$$\frac{\varphi'\,\varepsilon}{\varphi\varepsilon}+\lambda\varepsilon=0.$$

Помножая на $d\varepsilon$ и взявъ интегралъ, получаемъ

$$lg\,\varphi\varepsilon+\frac{\lambda}{2}\,\varepsilon^2=lg\,C$$

или

$$\varphi\varepsilon=C.\,e^{-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2};$$

таковъ видъ относительной вѣроятности погрѣшности ε; вѣроятность, что погрѣшность заключается между предѣлами $\pm\,\delta$ есть

$$p=\int_{-\delta}^{+\delta}\varphi\varepsilon\,d\varepsilon=C\int_{-\delta}^{+\delta}e^{-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2}\,d\varepsilon$$

По свойству случайныхъ погрѣшностей функція $\varphi\varepsilon$ должна уменьшаться съ возрастаніемъ ε и потому коэффиціентъ $-\frac{\lambda}{2}$ долженъ быть существенно отрицательный; полагая $\frac{\lambda}{2}=h^2$ имѣемъ

$$\varphi\varepsilon = C.\, e^{-h^2\varepsilon^2} \text{ и } \int_{-}^{+} \varphi\varepsilon d\varepsilon = C \int_{-}^{+} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

Для опредѣленія постоянной C имѣемъ

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = 1;$$

вставивъ сюда $h\,\varepsilon = t$, получимъ

$$\frac{C}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{C\sqrt{\pi}}{h} = 1,$$

откуда

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

и слѣдовательно

$$\varphi\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{}} e^{-h^2\varepsilon^2};\ p = \frac{h}{\sqrt{}} \int_{-}^{+} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Опредѣленный такимъ образомъ видъ функціи, выражающей вѣроятность случайной погрѣшности, не удовлетворяетъ строго тѣмъ условіямъ, которыя слѣдуютъ изъ свойства такихъ погрѣшностей: именно $\varphi\varepsilon$ не обращается въ нуль ни при какихъ конечныхъ величинахъ ε и

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi\varepsilon d\varepsilon$$

обращается въ единицу только при безконечно большихъ предѣлахъ; но свойство найденной функціи чрезвычайно быстро убывать съ возрастаніемъ ε позволяетъ, начиная съ извѣстной величины a, зависящей отъ h, пренебрегать чрезвычайно малою величиною

$$\int_{a}^{\infty} \varphi\varepsilon d\varepsilon$$

какъ мы уже замѣтили объ этомъ выше. Такое распространеніе предѣловъ возможныхъ погрѣшностей имѣетъ даже нѣкоторое основаніе, потому что, собственно говоря, дѣйствительные предѣлы означаются всегда не съ полною достовѣрностью, а только съ весьма большою вѣроятностію.

Интегралъ

$$p = \int_{-\delta}^{+\delta} \varphi\varepsilon d\varepsilon = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

означаетъ вѣроятность, что погрѣшность ε не превосходитъ въ числовой величинѣ предѣла δ; подставивъ въ немъ $h\varepsilon = t$, получимъ

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta h} e^{-t^2} dt$$

слѣд. такое предположеніе имѣетъ весьма большую вѣроятность, если δh достаточно велико; для предѣловъ возможныхъ погрѣшностей эта вѣроятность должна быть такъ велика, чтобы ее можна было считать достовѣрностію. Такъ какъ въ выраженіи вѣроятности p входитъ только одинъ неопредѣленный коэффиціентъ h, то только онъ и можетъ означать различія въ точности наблюденій. Если представимъ себѣ, что h' есть коэффиціентъ для другаго рода наблюденій и δ' соотвѣтствующая величина предѣла интеграла

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta'}^{+\delta'} e^{-h'^2\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

то для полученія одинаковой вѣроятности p мы должны имѣть $\delta h = \delta' h'$ или $h : h' = \delta' : \delta$; слѣд. чѣмъ болѣе h, тѣмъ меньшую погрѣшность можемъ мы ожидать отъ способа наблюденій при одинаковой вѣроятности: Гауссъ назвалъ этотъ коэффиціентъ *мѣрою точности наблюденій*. — Когда вѣроятность равна половинѣ, предѣлъ δ обращается въ вѣроятную погрѣшность r и мы имѣемъ $rh = 0{,}47694$; т. е. мѣра точности обратно пропорціональна вѣроятной погрѣшности. Вѣсъ есть очевидно количество прямо пропорціональное квадрату h. Соотношеніе между мѣрою точности и среднею ошибкою m получимъ, вычисляя m изъ уравненія

$$m^2 = \mu_2 = 2\int_0^{\infty} \varepsilon^2 \varphi\varepsilon d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Положивъ $h\varepsilon = t$, имѣемъ (§ 5)

$$m^2 = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2h^2}$$

откуда $hm = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70711$

Опредѣливши такимъ образомъ видъ функцій $\varphi_i\varepsilon_i$, возвратимся къ наивыгоднѣйшимъ результатамъ. Назовемъ черезъ $h_1, h_2, \ldots h_s$ мѣры точности наблюденій и подставимъ

$\varphi_i \varepsilon_i = \frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i$ въ уравненія вида $\sum \frac{\varphi_i' \varepsilon_i}{\varphi_i \varepsilon_i} . \frac{d\varepsilon_i}{dx_k} = 0$; получимъ

$$\sum h_i^2 \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = 0 \; ; \; \sum h_i^2 \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = 0 \; \ldots . \; \sum h_i^2 \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_n} = 0$$

т. е. условія наименьшей величины $\Sigma\,(h_i \varepsilon_i)^2$; это можно видѣть прямо изъ выраженія сложной вѣроятности, которая въ этомъ случаѣ обратится въ

$$\frac{h_1 h_2 \ldots h_s}{(\sqrt{\pi})^s} e^{-\Sigma\,(h_i \varepsilon_i)^2}$$

и будетъ очевидно наибольшая при наименьшей величинѣ $\Sigma\,(h_i \varepsilon_i)^2$. Если всѣ h равны, то получимъ, какъ въ правилѣ Лежандра, уравненія

$$\sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = 0 \; ; \; \sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = 0 \ldots \sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_n} = 0$$

Условіе наименьшей величины $\Sigma\,(h_i \varepsilon_i)^2$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ условіе наивыгоднѣйшаго опредѣленія неизвѣстныхъ изъ такихъ уравненій равнаго достоинства, случайныя погрѣшности которыхъ суть $h_i \varepsilon_i$; слѣдовательно помноженіе каждой погрѣшности на соотвѣтствующую мѣру точности приводитъ всѣ наблюденія къ одинаковой мѣрѣ точности.

Опредѣляя производныя $\frac{d\varepsilon_i}{dx_1}, \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} \ldots \frac{d\varepsilon_i}{dx_n}$ изъ данныхъ уравненій имѣемъ

$$\frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = a_{i,1} \; ; \; \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = a_{i,2} \; \ldots . \; \frac{d\varepsilon_i}{dx_n} = a_{i,n}$$

и выводныя уравненія будутъ:

$$x_1 \sum h_i^2 a_{i,1}^{\;2} + x_2 \sum h_i^2 a_{i,1} a_{i,2} + \ldots + x_n \sum h_i^2 a_{i,1} a_{i,n} - \sum h_i^2 a_{i,1} \omega_i = 0$$

$$x_1 \sum h_i^2 a_{i,2} a_{i,1} + x_2 \sum h_i^2 a_{i,2}^{\;2} + \ldots + x_n \sum h_i^2 a_{i,2} a_{i,n} - \sum h_i^2 a_{i,2} \omega_i = 0$$

$$x_1 \sum h_i^2 a_{i,n} a_{i,1} + x_2 \sum h_i^2 a_{i,n} a_{i,2} + \ldots + x_n \sum h_i^2 a_{i,n}^{\;2} - \sum h_i^2 a_{i,n} \omega_i = 0$$

здѣсь можно ввести вмѣсто квадратовъ мѣръ точности пропорціональные имъ вѣсы.

§ 22.

Доказательство Гаусса, какъ мы видимъ, основывается на томъ, что, допуская правило ариѳметической среды для всякаго числа непосредственныхъ измѣреній, мы необходимо должны допустить извѣстный законъ вѣроятности случайныхъ погрѣшностей и правило наименьшихъ квадратовъ обращается въ прямое слѣдствіе этого закона. Самое правило ариѳметической среды Гауссъ допускаетъ безъ всякаго доказательства, какъ общепринятое и подтверж-

денное постояннымъ согласіемъ съ опытами. Предыдущее изложеніе теоріи ариѳметической среды, основанное на анализѣ Лапласа, можетъ теперь указать намъ, какой степени довѣрія заслуживаетъ этотъ частный законъ вѣроятности случайныхъ погрѣшностей: онъ *очевидно можетъ быть допускаемъ* съ достаточнымъ приближеніемъ только при очень большомъ числѣ наблюденій; видъ $\varphi\varepsilon$, найденный нами выше, выражаетъ главнымъ образомъ только быстрое уменьшеніе вѣроятности съ приближеніемъ къ предѣламъ погрѣшностей, которые приводятся въ согласіе съ наблюденіями приличнымъ выборомъ коэффиціента h.

§ 23.

Мы говорили выше, что результатъ непосредственныхъ наблюденій могъ бы быть извлеченъ не только изъ условія $\Sigma\varepsilon_i=0$, но вообще изъ $\Sigma\varepsilon_i^{2n-1}=0$, если бы такое опредѣленіе не приводило къ чрезвычайно сложнымъ исчисленіямъ. Изъ условія $\Sigma\varepsilon_i^{2n-1}=0$ можно вывести для изысканія наивыгоднѣйшихъ результатовъ правила, аналогичныя съ способомъ наименьшихъ квадратовъ точно также, какъ Гауссъ вывелъ этотъ способъ изъ правила ариѳметической среды. Въ самомъ дѣлѣ, допуская весьма вѣроятное уравненіе:

$$\sum \varepsilon_i^{2n-1}=0$$

и соединяя его съ условіемъ наивыгоднѣйшаго опредѣленія одной неизвѣстной изъ непосредственныхъ наблюденій

$$\sum \frac{\varphi'\varepsilon_i}{\varphi\varepsilon_i}=0,$$

мы получимъ подобно прежнему уравненіе

$$\sum \left[\frac{\varphi'\varepsilon_i}{\varphi\varepsilon_i}+\lambda\varepsilon_i^{2n-1}\right]=0,$$

которое, распадаясь необходимо на отдѣльные члены, даетъ для опредѣленія вида функціи $\varphi\varepsilon$ дифференціальное уравненіе

$$\frac{\varphi'\varepsilon}{\varphi\varepsilon}+\lambda\varepsilon^{2n-1}=0,$$

откуда

$$\varphi\varepsilon=Ce^{-\frac{\lambda}{2n}\varepsilon^{2n}},$$

т. е. наивыгоднѣйшее опредѣленіе неизвѣстныхъ будетъ то, для котораго вообще $\Sigma\varepsilon^{2n}$ имѣетъ наименьшую величину; проистекающія отсюда выводныя уравненія

$$\sum \varepsilon_i^{2n-1}\frac{d\varepsilon_i}{dx_1}=0 \;\ldots\ldots\; \sum \varepsilon_i^{2n-1}\frac{d\varepsilon_i}{dx_n}=0$$

или

$$\sum a_{i,1}\varepsilon^{2n-1}=0\ldots\ldots \sum a_{i,n}\varepsilon^{2n-1}=0$$

приводятъ очевидно къ чрезвычайно сложнымъ и въ большей части случаевъ невыполнимымъ исчисленіямъ; эти уравненія только въ способѣ наименьшихъ квадратовъ остаются линейными и потому этотъ способъ есть простѣйшій изъ всѣхъ возможныхъ, что даетъ ему безусловное преимущество въ практическомъ отношеніи.

§ 24.

Мѣра точности и вѣроятная ошибка вычисляются какъ мы видѣли черезъ среднюю погрѣшность m, величина которой можетъ быть приближенно опредѣлена изъ наблюденій, чрезъ замѣну интеграла $2\int_0^\infty \varepsilon^2\varphi\varepsilon d\varepsilon$ суммою $\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{s}$. Возможность найти при частномъ значеніи $\varphi\varepsilon$ всѣ интегралы вида $\int_0^\infty \varepsilon^n\varphi\varepsilon d\varepsilon$ даетъ средство опредѣлить изъ наблюденій мѣру точности h не только посредствомъ квадратовъ погрѣшностей, но помощію какихъ бы то ни было другихъ степеней ихъ. Дѣйствительно, полагая $\varphi\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$, находимъ вообще

$$\mu_k = 2\int_0^\infty \varepsilon^k.\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon = \frac{2}{h^k\sqrt{\pi}}\int_0^\infty (h\varepsilon)^k e^{-(h\varepsilon)^2}d(h\varepsilon) = \frac{\Gamma\frac{1}{2}(k+1)}{h^k\sqrt{\pi}}$$

и слѣдовательно

$$h = \sqrt[k]{\frac{\Gamma\frac{1}{2}(k+1)}{\mu_k.\sqrt{\pi}}}$$

При большомъ числѣ s наблюденій можно замѣнить μ_k вѣроятнѣйшею величиною $\frac{\Sigma\varepsilon_i^k}{s}$ т. е. принять

$$h = \sqrt[k]{\frac{s\,\Gamma\frac{1}{2}(k+1)}{\Sigma\varepsilon_i^k.\ \sqrt{\pi}}};$$

при нечетномъ $h = 2m-1$ это выраженіе будетъ

$$h = \sqrt[2m-1]{\frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ m.s}{\Sigma\ \varepsilon_i^{2m-1}.\ \sqrt{\pi}}}$$

а при четномъ $k = 2m$

$$h = \sqrt[2m]{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ldots\ \frac{2m-1}{2}.\ \frac{s}{\Sigma\varepsilon_i^{2m}}}$$

Такимъ образомъ получаеется для h безконечно большое число выраженій, которыя всѣ давали бы одинаковую величину, если бы въ вычисленіе ихъ не входило приближенныхъ

среднихъ величинъ $\frac{\Sigma \varepsilon_i^k}{s}$; въ дѣйствительности величины h будутъ болѣе или менѣе различны между собою и самъ собою возникаетъ вопросъ, какое опредѣленіе h должно считать самымъ выгоднымъ. Рѣшенію этого вопроса посвящена статья Гаусса: *«Memoire sur la détermination de la précision des observations»* въ *Zeitschrift für Astronomie und Verwandte Wissenschaften.* Изслѣдованіе этого вопроса, какъ мы сейчасъ увидимъ, приводитъ къ тому заключенію, что самое выгодное опредѣленіе h получается именно помощію средней ошибки m; мы видѣли кромѣ того, что отъ этой же величины m зависитъ степень благонадежности ариѳметической среды, а слѣд. и простекающаго изъ правила ариѳметической среды способа наименьшихъ квадратовъ: поэтому то Гауссъ приписалъ особенную важность средней ошибкѣ въ сравненіи съ другими средними выводами вида $\sqrt[k]{\frac{\Sigma \varepsilon_i^k}{s}}$.

Сложная относительная вѣроятность системы погрѣшностей равно хорошихъ наблюденій выражается функціею

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^s e^{-h^2 \Sigma\varepsilon_i^2};$$

когда въ этомъ выраженіи извѣстна сумма $\Sigma\varepsilon_i^2$ и неизвѣстна мѣра точности h, то подставляя вмѣсто h различныя величины будемъ получать различныя величины и для сложной вѣроятности извѣстныхъ погрѣшностей и эта вѣроятность будетъ очевидно наибольшею, если h дана будетъ самая вѣроятная величина. Такимъ образомъ самое выгодное выраженіе h получится изъ уравненія:

$$\frac{d}{dh}\left(h^s e^{-h^2 \Sigma\varepsilon_i^2}\right) = 0,$$

или

$$h^{s-1} e^{-h^2 \Sigma\varepsilon_i^2}\left(s - 2\, h^2 \Sigma\varepsilon_i^2\right) = 0;$$

такъ какъ h вообще не равно ни нулю, ни безконечности, то имѣемъ просто, называя опредѣленную такимъ образомъ наивыгоднѣйшую величину h черезъ H,

$$s - 2\, H^2 \Sigma\varepsilon_i^2 = 0,$$

откуда

$$H = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\Sigma\varepsilon_i^2}}$$

При большомъ числѣ наблюденій можно положить $\Sigma\varepsilon_i^2 = s\mu_2$; слѣд. мы получимъ какъ и прежде:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2\mu_2}} = \frac{1}{m\sqrt{2}},$$

т. е. наивыгоднѣйшее опредѣленіе мѣры точности получается съ помощію суммы квадратовъ погрѣшностей или съ помощію средней ошибки. Функція $\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^s e^{-h^2 \Sigma \varepsilon_i^2}$, которая при h перемѣнномъ представляетъ относительную вѣроятность предположенія, сдѣланнаго о величинѣ h, получаетъ при $h = H$ наибольшую величину:

$$\left(\frac{H}{\sqrt{\pi}}\right)^s e^{-\frac{s}{2}}$$

§ 25.

Мѣра точности и слѣд. вѣроятная ошибка могутъ быть вычислены помощію различныхъ степеней погрѣшностей: постараемся определить вѣроятные предѣлы погрѣшностей этихъ различныхъ опредѣленій; при этомъ мы можемъ замѣтить очевидное преимущество вычислять h помощію квадратовъ погрѣшностей. Мы нашли въ первой главѣ (§ 11), что вѣроятные предѣлы суммы n—ыхъ степеней погрѣшностей, взятыхъ съ положительнымъ знакомъ, суть

$$\Sigma \varepsilon_i^n = s\mu_n \left[1 \pm 0{,}47694 \sqrt{\frac{2}{s}\left(\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2} - 1\right)}\right],$$

приложимъ теперь этотъ результатъ, относящійся ко всякому закону вѣроятности погрѣшностей, къ частному значенію $\varphi\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$; тогда $\mu_n = \frac{\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}{h^n \cdot \sqrt{\pi}}$ и вѣроятные предѣлы истинной величины $\Sigma\varepsilon_i^n$ будутъ

$$\Sigma\varepsilon_i^n = \frac{s\,\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}{h^n \sqrt{\pi}} \left[1 \pm 0{,}47694 \sqrt{\frac{2}{s}\left(\frac{\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{[\Gamma\frac{1}{2}(n+1)]^2} - 1\right)}\right]$$

Отсюда найдемъ предѣлы для мѣры точности h, когда въ ея вычисленіи интегралъ μ_n замѣненъ суммою $\Sigma\varepsilon_i^n$; именно

$$h = \left\{\frac{s\,\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}{\Sigma\varepsilon_i^n . \sqrt{\pi}} \left[1 \pm 0{,}47694 \sqrt{\frac{2}{s}\left(\frac{\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{[\Gamma\frac{1}{2}(n+1)]^2} - 1\right)}\right]\right\}^{\frac{1}{n}}$$

Разлагая множителя при $\sqrt[n]{\frac{s\,\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}{\sqrt{\pi}.\,\Sigma\varepsilon_i^n}}$ въ рядъ и довольствуясь первою степенью, т. е. пренебрегая членами дѣленными на s, получимъ

$$h=\sqrt[n]{\frac{s\,\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}{\sqrt{\pi}\cdot\Sigma\varepsilon_i^n}}\left[1\pm\frac{0.47694}{n}\sqrt{\frac{2}{s}\left(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{[\Gamma\frac{1}{2}(n+1)]^2}-1\right)}\right].$$

Вычисляя въ этой формулѣ вечичины $\frac{0,47694}{n}\sqrt{\frac{2}{s}\left[\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{[\Gamma\frac{1}{2}(n+1)]^2}-1\right]}=\alpha_n$ для различныхъ n найдемъ:

$$\alpha_1=\frac{0,50958}{\sqrt{s}};\ \alpha_2=\frac{0,47694}{\sqrt{s}};\ \alpha_3=\frac{0,49720}{\sqrt{s}};\ \alpha_4=\frac{0\ 55072}{\sqrt{s}};$$

$$\alpha_5=\frac{0,63551}{\sqrt{s}};\ \alpha_6=\frac{0,75578}{\sqrt{s}}\ \text{и т. д.}$$

отсюда видно, что наименьшая изъ величинъ α_n есть α_2 т. е. предѣлы выходятъ наиболѣе тѣсные при опредѣленіи мѣры точности изъ квадратовъ погрѣшностей. Чтобы судить объ относительной выгодѣ употребленія различныхъ α_n, разсмотримъ отношенія чиселъ наблюденій, необходимыхъ для достиженія одинаковой благонадежности въ опредѣленіи h помощію различныхъ степеней погрѣшностей; назовемъ черезъ s_1, s_2.... s_n числа наблюденій, при которыхъ всѣ α_n выходятъ одинаковы, получимъ очевидно

$$s_1:s_2:s_3:\text{и т. д.}=(0,50958)^2:(0,47694)^2:(0,49720)^2:\text{и т. д}$$

или, приведя всѣ числа къ $s_2=100$

$$s_1:s_2:s_3:s_4:s_5:s_6:\ \ldots=114:100:109:133:178;\ 251:\ \ldots$$

т. е. для одинаково благонадежнаго вывода мѣры точности изъ различныхъ степеней погрѣшностей нужно принимать въ расчетъ по 100 наблюденій, служащихъ къ опредѣленію изъ квадратовъ погрѣшностей, 114 наблюденій для опредѣленія изъ первыхъ степеней, 109 изъ третьихъ и т. д. При очень большомъ числѣ наблюденій вычисленіе суммы погрѣшностей гораздо проще нежели суммы квадратовъ и потому для сокращенія исчисленій можно весьма удовлетворительно опредѣлять мѣру точности изъ первыхъ степеней, если сумма квадратовъ не нужна для другихъ цѣлей

§ 26.

Разсмотримъ теперь, какъ при частномъ значеніи закона вѣроятности погрѣшностей, опредѣляются вѣсы результатовъ полученныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ. Вопросъ этотъ, имѣетъ чрезвычайно большую важность, потому что отъ него зависитъ опредѣленіе вѣроятныхъ предѣловъ погрѣшности каждаго результата и слѣд степень довѣрія къ нему.

Начнемъ съ простѣйшаго случая, когда уравненія содержатъ только одну неизвѣстную, т. е. имѣютъ видъ

$$a_i x-\omega_i=\varepsilon_i.$$

Наивыгоднѣйшее опредѣленіе x получается изъ условія наименьшей величины $\Sigma\varepsilon_i^2$ и, называя величину x, опредѣленную подъ этимъ условіемъ, черезъ ξ, мы нашли

$$\xi = \frac{\Sigma a_i \omega_i}{\Sigma a_i^2}$$

Результатъ этотъ относится къ случаю разнородныхъ наблюденій, если уравненія помножены соотвѣтственно на свои мѣры точности и такимъ образомъ приведены къ общей мѣрѣ точности. Предположенію $x = \xi$ соотвѣтствуетъ наибольшая величина сложной вѣроятности $K.\, e^{-h^2 \Sigma E_i^2}$, потому что погрѣшности E_1, E_2.. E_i, вычисленныя въ предположеніи $x = \xi$ удовлетворяютъ наименьшей величинѣ суммы квадратовъ $\Sigma \varepsilon_i^2$. Всякому другому предположенію о величинѣ x соотвѣтствуетъ другая система погрѣшностей и слѣд. другая величина вѣроятности $K\, e^{-h^2 \Sigma \varepsilon_i^2}$, такъ что функція $Ke^{-h^2 \Sigma \varepsilon_i^2}$ если въ ней намѣсто ε_1, ε_2... подставлены погрѣшности, вычисленныя въ извѣстномъ предположеніи о величинѣ x, представляетъ относительную вѣроятность этого предположенія. Вѣроятнѣйшая величина ξ безъ сомнѣнія будетъ отличаться отъ истинной величины x; положимъ, что погрѣшность въ опредѣленіи $x = \xi$ есть Δx, т. е. что истинная величина $x = \xi + \Delta x$, тогда функція

$$K e^{-h^2 \Sigma (a_i x - \omega_i)^2},$$

гдѣ $x = \xi + \Delta x$, будетъ означать относительную вѣроятность погрѣшности Δx въ опредѣленіи $x = \xi$; точно также

$$K.\, e^{-h^2 \Sigma [a_i (x + dx) - \omega_i]^2}$$

по причинѣ $d\Delta x = dx$, означаетъ вѣроятность погрѣшности $\Delta x + d\Delta x$ и слѣдовательно

$$K.\, e^{-h^2 \Sigma [a_i x - \omega_i]^2} d\Delta x$$

будетъ вѣроятность, что истинная величина x заключается между предѣлами $\xi + \Delta x$ и $\xi + \Delta x + d\Delta x$. Если бы мы привели эту вѣроятность къ виду

$$K.\, e^{-H^2 \Delta x^2} d\Delta x$$

то величина H была бы мѣра точности опредѣленія $x = \xi$ и слѣд. выраженіе $\frac{H^2}{h^2}$ выразило бы относительный вѣсъ этого опредѣленія. Показатель $-h^2 \Sigma [a_i x - \omega_i]^2$ легко привести къ виду $-H^2 \Delta x^2$ слѣдующимъ образомъ:

$$\Sigma [a_i x - \omega_i]^2 = x^2 \Sigma a_i^2 - 2x\, \Sigma a_i \omega_i + \Sigma \omega_i^2;$$

подставимъ сюда вмѣсто $\Sigma a_i \omega_i$ ея величину $\xi \Sigma a_i^2$ и приложимъ и вычтемъ членъ $\xi^2 \Sigma a_i^2$, тогда выйдетъ

$$\Sigma (a_i x - \omega_i)^2 = (x - \xi)^2\, \Sigma a_i^2 + \Sigma \omega_i^2 - \xi^2\, \Sigma a_i^2$$

т. е.

$$\Sigma [a_i x - \omega_i]^2 = \Delta x^2\, \Sigma a_i^2 + C,$$

гдѣ C есть постоянная величина; относя e^C къ постоянному коэффиціенту K найдемъ вѣроятность

$$K.\,e^{-h^2\,\Sigma a_i^2.\,\Delta x^2}d\Delta x$$

слѣд. $H = h.\sqrt{\Sigma a_i^2}$ и вѣсъ опредѣленія $x = \xi$, согласно съ тѣмъ, что мы нашли въ первой главѣ, равенъ Σa_i^2. Постоянное K опредѣлится изъ уравненія

$$K.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\,\Sigma a_i^2.\,\Delta x^2}d\Delta x = 1.$$

откуда

$$K = \frac{h.\sqrt{\Sigma a_i^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Вѣроятность, что погрѣшность Δx не превосходитъ величины δ, будетъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\delta h\sqrt{\Sigma a_i^2}} e^{-t^2}dt\ ;$$

когда эта вѣроятность равна половинѣ, имѣемъ

$$r_x\,h\sqrt{\Sigma a_i^2} = 0{,}47694$$

гдѣ r_x есть вѣроятная погрѣшность величины ξ; слѣд. съ вѣроятностію равной половинѣ можно предполагать, что величина x не выходитъ изъ предѣловъ

$$\xi \pm \frac{0{,}47694}{h\sqrt{\Sigma a_i^2}}$$

§ 27.

Обратимся теперь къ изысканію вѣсовъ въ случаѣ многихъ неизвѣстныхъ. Уравненія, полученныя изъ наблюденій, имѣютъ видъ:

$$\begin{array}{l}
a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \ldots + a_{1,k}\,x_k + \ldots + a_{1,n}\,x_n - \omega_1 = \varepsilon_1 \\
a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \ldots + a_{2,k}\,x_k + \ldots + a_{2,n}\,x_n - \omega_2 = \varepsilon_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \ldots + a_{i,k}\,x_k + \ldots + a_{i,n}\,x_n - \omega_i = \varepsilon_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{s,1}\,x_1 + a_{s,2}\,x_2 + \ldots + a_{s,k}\,x_k + \ldots + a_{s,n}\,x_n - \omega_s = \varepsilon_s
\end{array}$$

Оставляя знаку Σ прежнее значеніе суммованія отъ 1 до s по указателю i порядка наблюденій, означимъ знакомъ S_l^n суммованіе отъ l до n по указателю k порядка неизвѣстныхъ; тогда предыдущимъ уравненіямъ можно дать такой видъ:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{S}_1^n a_{1,k}x_k - \omega_1 = \varepsilon_1 \\
\mathrm{S}_1^n a_{2,k}x_k - \omega_2 = \varepsilon_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathrm{S}_1^n a_{i,k}x_k - \omega_i = \varepsilon_i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathrm{S}_1^n a_{s,k}x_k - \omega_s = \varepsilon_s
\end{array}\right\} \quad (I)$$

Назовемъ черезъ $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k, \dots \xi_n$ величины неизвѣстныхъ, удовлетворяющія условію наименьшей величины суммы квадратовъ погрѣшностей; онѣ опредѣлятся изъ уравненій вида $\Sigma\varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_k} = 0$ т. е. изъ

$$\begin{array}{l}
\mathrm{S}_1^n \left[\xi_k \sum a_{i,1}\, a_{i,k}\right] - \sum a_{i,1}\omega_i = 0 \\
\mathrm{S}_1^n \left[\xi_k \sum a_{i,2} a_{i,k}\right] - \sum a_{i,2}\omega_i = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathrm{S}_1^n \left[\xi_k \sum a_{i,n}\, a_{i,k}\right] - \sum a_{i,n}\omega_i = 0
\end{array}$$

и будутъ самыя вѣроятныя величины $x_1, x_2, \dots x_n$; безъ сомнѣнія онѣ будутъ отличаться отъ истинныхъ значеній неизвѣстныхъ; такъ что, подставляя въ эти уравненія истинныя величины $x_1 . x_2 \dots x_n$ вмѣсто $\xi_1 . \xi_2 \dots \xi_n$ вторыя части не будутъ нули; означая ихъ черезъ $A_1, A_2 \dots A_n$, получимъ

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{S}_1^n \left[x_k \sum a_{i,1}a_{i,k}\right] - \sum a_{i,1}\omega_i = A_1 \\
\mathrm{S}_1^n \left[x_k \sum a_{i,2}a_{i,k}\right] - \sum a_{i,2}\omega_i = A_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathrm{S}_1^n \left[x_k \sum a_{i,n}a_{i,k}\right] - \sum a_{i,n}\omega_i = A_n
\end{array}\right\} \quad (II)$$

Наивыгоднѣйшія величины ξ_k получатся изъ выведенныхъ отсюда выраженій x_k, если положимъ въ нихъ $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$.

§ 28.

Опредѣлимъ x_1 изъ перваго уравненія; получимъ

$$x_1 = -\frac{\mathrm{S}_2^n \left[x_k \,\Sigma a_{i,1} a_{i,k}\right]}{\Sigma a_{i,1}^{\ 2}} + \frac{\Sigma a_{i,1}\omega_i}{\Sigma a_{i,1}^{\ 2}} + \frac{A_1}{\Sigma a_{i,1}^{\ 2}};$$

вставимъ эту величину въ какое нибудь изъ остальныхъ ура неній, напр въ соотвѣтствующее порядку l, т. е. въ

$$\mathbf{S}_1^n\left[x_k \sum a_{i,l}a_{i,k}\right]-\sum a_{i,l}\omega_i=A_l,$$

которому можно дать видъ:

$$x_1\sum a_{i,l}\,a_{i,1}+\mathbf{S}_2^n\left[x_k \sum a_{i,l}a_{i,k}\right]-\sum a_{i,l}\omega_i=A_l;$$

соединяя суммы распространяющіяся на одинакіе предѣлы, получимъ:

$$\mathbf{S}_2^n\left[x_k\left(\sum a_{i,l}\,a_{i,k}-\frac{\Sigma a_{i,1}\;a_{i,l}\,\Sigma a_{i,1}\;a_{i,k}}{\Sigma a_{i,1}{}^2}\right)\right]-\left[\sum a_{i,l}\omega_i-\frac{\Sigma a_{i,1}\,a_{i,l}\,\Sigma a_{i,1}\,\omega_i}{\Sigma a_{i,1}{}^2}\right]=A_l-\frac{A_1\;\Sigma a_{i,1}\,a_{i,l}}{\Sigma a_{i,1}{}^2}$$

или, означая для сокращенія коэффиціентъ при x_k и два другіе члена, по порядку черезъ $\Sigma b_{i,l}\,b_{i,k}$, $\Sigma b_{i,l}\,\omega_i^{(2)}$ и B_l, получимъ

$$\mathbf{S}_2^n\left[x_k \sum b_{i,l}\;\;b_{i,k}\right]-\sum b_{i,l}\omega_i^{(2)}=B_l$$

Отъ подстановки величины x_1 опредѣленной изъ перваго уравненія во всѣ прочія получатся такимъ образомъ $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными $x_2, x_3, \ldots x_n$:

$$\mathbf{S}_2^n\left[x_k \sum b_{i,2}b_{i,k}\right]-\sum b_{i,2}\omega_i^{(2)}=B_2$$

$$\mathbf{S}_2^n\left[x_k \sum b_{i,3}b_{i,k}\right]-\sum b_{i,3}\omega_i^{(2)}=B_3 \qquad \text{(III)}$$

. . . .

$$\mathbf{S}_2^n\left[x_k \sum b_{i,n}b_{i,k}\right]-\sum b_{i,n}\omega_i^{(2)}=B_n$$

Уравненія эти по виду совершенно сходны съ уравненіями (II); изъ нихъ вѣроятнѣйшія величины ξ_2, $\xi_3 \ldots \xi_n$ опредѣлятся, если положимъ $B_2=B_3=\ldots=B_n=0$; такъ, что коэффиціенты $\Sigma b_{i,l}b_{i,k}$ можно разсматривать, какъ дѣйствительныя суммы, опредѣляя приличнымъ образомъ величины b, и уравненія (III) можно считать выведенными изъ наблюденій, опредѣляющихъ только $n-1$ неизвѣстныхъ x_2, $x_3 \ldots x_n$. Точно такимъ же образомъ, вставляя величину x_2 опредѣленную изъ перваго изъ уравненій (III) во всѣ прочія и означая

$$\sum\; b_{i,l}\,b_{i,k}-\frac{\Sigma\, b_{i,2}b_{i,l};\;\Sigma\, b_{i,2}\;\;b_{i,k}}{\Sigma\, b_{i,2}{}^2}=\sum c_{i,l}\,c_{i,k}$$

$$\sum b_{i,l}\,\omega_i-\frac{^{(2)}\,\Sigma\, b_{i,2}\;\;b_{i,l}\,\Sigma b_{i,2}\,\omega_i^{(2)}}{\Sigma\, b_{i,2}{}^2}=\sum\; c_{i,l}\,\omega_i^{(3)}$$

$$B_l-\frac{B_2\;\;\Sigma\, b_{i,2}\,b_{i,l}}{\Sigma\, b_{i,2}{}^2}\;=\;C_l$$

получимъ $n-2$ уравненій съ $n-2$ неизвѣстными x_3, $x_4 \ldots x_n$:

$$\mathbf{S}_3^n \left[x_k \sum c_{i,3} \, c_{i,k} \right] - \sum c_{i,3} \, \omega_i^{(3)} = C_3$$

$$\mathbf{S}_3^n \left[x_k \sum c_{i,4} \, c_{i,k} \right] - \sum c_{i,4} \, \omega_i^{(3)} = C_4$$

. . . .

$$\mathbf{S}_3^n \left[x_k \sum c_{i,n} \, c_{i,k} \right] - \sum c_{i,n} \, \omega_i^{(3)} = C_n.$$

Продолжая подобнымъ образомъ исключеніе неизвѣстныхъ, дойдемъ наконецъ до уравненія, содержащаго только x_n; оно будетъ имѣть видъ

$$x_n \sum q_{i,n}^2 - \sum q_{i,n} \, \omega_i^{(n)} = Q_n, \tag{IV}$$

сходный съ видомъ выводнаго уравненія, составленнаго для наблюденій, содержащихъ одну неизвѣстную. Для наивыгоднѣйшаго результата, по причинѣ $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$, имѣемъ вообще $B_i = 0$, $C_i = 0\ldots$ и слѣд. $Q_n = 0$; такимъ образомъ наивыгоднѣйшая величина ξ_n опредѣлится изъ уравненія:

$$\xi_n \sum q_{i,n}^2 - \sum q_{i,n} \, \omega_i^{(n)} = 0$$

и будетъ

$$\xi_n = \frac{\Sigma \, q_{i,n} \, \omega_i^{(n)}}{\Sigma \, q_{i,n}^2}. \tag{IV'}$$

§ 29.

Допуская по аналогіи, что величины $q_{i,n}$ имѣютъ значеніе коэффиціентовъ при x_n въ нѣкоторыхъ уравненіяхъ вида

$$q_{i,n} \, x_n - \omega_i^{(n)} = 0$$

получаемыхъ изъ наблюденій для опредѣленія одной неизвѣстной x_n; мы можемъ предвидѣть, что вѣсъ результата ξ_n есть $\Sigma \, q_{i,n}^2$. Подтвержденіе этой догадки основывается на томъ, что функція

$$Ke^{-h^2 \Sigma \varepsilon_i^2}$$

или, полагая общую мѣру точности h равною единицѣ и $\Sigma \varepsilon_i^2 = M$,

$$Ke^{-M}$$

пропорціональна сложной вѣроятности извѣстной системы погрѣшностей и слѣд. представляетъ относительную вѣроятность данной системы неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Чтобы опредѣлить вѣсъ вывода ξ_n представимъ функцію M въ удобномъ для этой цѣли видѣ:

$$M = \frac{A_1^2}{\Sigma a_{i,1}^2} + \frac{B_2^2}{\Sigma \, b_{i,2}^2} + \frac{C_3^2}{\Sigma \, c_{i,3}^2} + \cdots + \frac{Q_n^2}{\Sigma \, q_{i,n}^2} + \text{Пост.}$$

Къ этому виду можно привести величину M помощію простаго разложенія суммы квадратовъ погрѣшностей; но гораздо удобнѣе исполнить это по слѣдующему способу, который предложенъ Гауссомъ въ «*Theoria motus corporum coelestium*».

Изъ составленія уравненій (II) слѣдуетъ, что

$$A_1 = \sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dM}{dx_1}$$

и въ A_1 входятъ всѣ неизвѣстныя $x_1, x_2 \ldots x_n$. Положимъ

$$M - \frac{A_1^2}{\lambda_1} = M_1$$

и опредѣлимъ величину λ_1 подъ условіемъ, чтобы M_1 не содержало перемѣнной x_1: для этого имѣемъ уравненіе

$$\frac{dM_1}{dx_1} = 0$$

т. е.

$$\frac{dM_1}{dx_1} = \frac{dM}{dx_1} - \frac{2A_1}{\lambda_1} \cdot \frac{dA_1}{dx_1} = 0$$

но $\dfrac{dM}{dx_1} = 2A_1$ и $\dfrac{dA_1}{dx_1} = \sum a_{i,1}^2$; слѣд. $\lambda_1 = \sum a_{i,1}^2$ и функція

$$M_1 = M - \frac{A_1^2}{\Sigma a_{i,1}^2}$$

не содержитъ x_1. Разсмотримъ теперь $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{dM_1}{dx_2}$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dM_1}{dx_2} = \frac{1}{2} \frac{dM}{dx_2} - \frac{A_1}{\Sigma a_{i,1}^2} \cdot \frac{dA_1}{dx_2} = A_2 - \frac{\Sigma a_{i,1} a_{i,2}}{\Sigma a_{i,1}^2} A_1 = B_2;$$

положимъ

$$M_1 - \frac{B_2^2}{\lambda_2} = M_2$$

и опредѣлимъ λ_2 подъ условіемъ, что M_2 не содержитъ x_2; т. е. что $\dfrac{dM_2}{dx_2} = 0$; получимъ

$$\frac{dM_2}{dx_2} = \frac{dM_1}{dx_2} - \frac{2B_2}{\lambda_2} \cdot \frac{dB_2}{dx_2} = 0,$$

но $$\frac{dM_1}{dx_2} = 2B_2; \quad \frac{dB_2}{dx_2} = \Sigma\, b_{i,2}^2; \text{ слѣд. } \lambda_2 = \Sigma b_{i,2}^2$$

и функція $$M_2 = M - \frac{A_1^2}{\Sigma a_{i,1}^2} - \frac{B_2^2}{\Sigma b_{i,2}^2}$$

не содержитъ ни x_1, ни x_2. Полагая далѣе

$$M_3 = M_2 - \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{dM_2}{dx_3}\right)^2}{\lambda_3}$$

опредѣлимъ

$$\frac{1}{2}\frac{dM_2}{dx_3}=\frac{1}{2}\frac{dM_1}{dx_3}-\frac{B_2}{\Sigma b_{i,2}^2}\frac{dB_2}{dx_3}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dM_1}{dx_3}=\frac{1}{2}\frac{dM}{dx_3}-\frac{A_1}{\Sigma a_{i,1}^2}\frac{dA_1}{dx_3}=A_3-\frac{\Sigma a_{i,1}a_{i,3}}{\Sigma a_{i,1}^2}A_1=B_3$$

и слѣд.

$$\frac{1}{2}\frac{dM_2}{dx_3}=B_3-\frac{\Sigma b_{i,2}b_{i,3}}{\Sigma b_{i,2}^2}B_2=C_3,$$

т. е.

$$M_3=M_2-\frac{C_3^2}{\lambda_3};$$

опредѣлимъ λ_3 подъ условіемъ, чтобы M_3 не содержало x_3; для этого имѣемъ

$$\frac{dM_3}{dx_3}=\frac{dM_2}{dx_3}-\frac{2C_3}{\lambda_3}\cdot\frac{dC_3}{dx_3}=0,$$

но $\frac{dM_2}{dx_3}=2C_3$ и $\frac{dC_3}{dx_3}=\Sigma c^2_{i,3}$, слѣд. $\lambda_3=\Sigma c^2_{i,3}$ и функція

$$M_3=M-\frac{A^2_1}{\Sigma a_{i,1}^2}-\frac{B^2_2}{\Sigma b_{i,2}^2}-\frac{C^2_3}{\Sigma c_{i,3}^2}$$

содержитъ только $x_4, x_5 \ldots x_n$. Продолжая точно также, найдемъ окончательно

$$M=\frac{A^2_1}{\Sigma a_{i,1}^2}+\frac{B^2_2}{\Sigma b_{i,2}^2}+\frac{C^2_3}{\Sigma c_{i,3}^2}+\ldots+\frac{Q^2_n}{\Sigma q_{i,n}^2}+\text{Пост.}$$

гдѣ Q_n содержитъ только x_n. Постоянная величина независитъ отъ $x_1, x_2 \ldots x_n$ и потому не измѣняется съ перемѣною ихъ; ея значеніе открывается, когда на мѣсто $x_1, x_2 \ldots x_n$ поставимъ въ M ихъ вѣроятнѣйшія значенія $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$, при этомъ $A_1=B_1=\ldots Q_n=0$ и слѣд. постоянная величина есть наименьшая величина M; если назовемъ черезъ $E_1, E_2 \ldots E_s$ погрѣшности, соотвѣтствующія предположенію $x_1=\xi_1$; $x_2=\xi_2 \ldots x_n=\xi_n$, то будемъ имѣть

$$M=\frac{A^2_1}{\Sigma a_{i,1}^2}+\frac{B^2_2}{\Sigma b_{i,2}^2}+\ldots+\frac{Q^2_n}{\Sigma q_{i,n}^2}+\Sigma E_i^2$$

Сравнивая это выраженіе съ тѣмъ, которое получается чрезъ непосредственное разложеніе величины M, легко убѣдимся, что

$$\Sigma E_i^2=\Sigma\omega_i^{(n)2};$$

это равенство даетъ намъ средство вычислить сумму ΣE_i^2 не дѣлая подстановки величинъ ξ_k въ начальныя уравненія.

§ 30.

Мы сказали, что функція Ke^{-M} пропорціональна вѣроятности соотвѣтствующей системы неизвѣстныхъ; точно также функція:

$$Ke^{-M}dx_1dx_2\dots dx_n$$

есть вѣроятность, что неизвѣстныя заключаются между предѣлами x_1 и x_1+dx_1: x_2 и x_2+dx_2 и пр. Отнесемъ постоянную величину $e^{-\Sigma E_i^2}$ къ коэффиціенту K, эта вѣроятность будетъ:

$$Ke^{-\left[\frac{A_1^2}{\Sigma a_{i,1}^2}+\frac{B_2^2}{\Sigma b_{i,2}^2}+\dots+\frac{Q_n^2}{\Sigma q_{i,n}^2}\right]}dx_1dx_2\dots dx_n$$

Возмемъ интегралъ этого выраженія относительно x_1 между предѣлами $-\infty$ и $+\infty$; x_1 заключается только въ A_1 и $\frac{dA_1}{dx_1}=\Sigma a_{i,1}^2$, слѣд. интегралъ будетъ:

$$K.\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\Sigma a_{i,1}^2}}e^{-\left[\frac{B_2^2}{\Sigma b_{i,2}^2}+\frac{C_3^2}{\Sigma c_{i,3}^2}+\dots+\frac{Q_n^2}{\Sigma q_{i,n}^2}\right]}dx_2dx_3\dots dx_n;$$

онъ означаетъ вѣроятность, что величины $x_2, x_3\dots x_n$ заключаются между предѣлами x_2 и x_2+dx_2; x_3 и x_3+dx_3 и т. д. между тѣмъ какъ x_1 можетъ имѣть всякую величину между $-\infty$ и $+\infty$. Интегрируя потомъ относительно x_2 и замѣчая, что x_2 заключается только въ B_2 и что $\frac{dB_2}{dx_2}=\Sigma b_{i,2}^2$ и т. д. получимъ наконецъ для вѣроятности, что при какихъ бы то ни было величинахъ x_1, $x_2\dots x_{n-1}$, неизвѣстная x_n заключается между предѣлами x_n и x_n+dx_n, выраженіе

$$K.\frac{(\sqrt{\pi})^{n-1}}{\sqrt{\Sigma a_{i,1}^2.\Sigma b_{i,2}^2\dots\dots}}e^{-\frac{Q_n^2}{\Sigma q_{i,n}^2}}dx_n$$

Вставляя сюда вмѣсто Q_n его величину (IV), получимъ вѣроятность, что ξ_n есть истинная величина x_n:

$$K'.\ e^{-\Sigma q_{i,n}^2(x_n-\xi_n)^2}dx_n$$

слѣд. $\Sigma q_{i,n}^2$ есть квадратъ мѣры точности или, что одно и тоже, вѣсъ опредѣленія $x_n=\xi_n$.

Поступая такимъ же точно образомъ со всѣми прочими неизвѣстными т. е. оставляя при исключеніи послѣднимъ каждое изъ неизвѣстныхъ, опредѣлимъ вѣсы ихъ всѣхъ.

§ 31

Полученные такимъ образомъ вѣсы, показываютъ намъ относительную благонадежность каждаго отдѣльнаго вывода независимо отъ того, каковы при этомъ величины прочихъ неизвѣстныхъ; поэтому, если мы вычислимъ величину r_n изъ уравненія

$$2\sqrt{\frac{\Sigma q_{i,n}^2}{\pi}}\int_0^{r_n}e^{-\Sigma q_{i,n}^2(x_n-\xi_n)^2}dx_n=\frac{1}{2}$$

то эта величина $r_n=\frac{0,47694}{\sqrt{\Sigma q_{i,n}^2}}$, которую Гауссъ и Лапласъ принимали за вѣроятную погрѣш-

ность вывода $x_n = \xi_n$ не будетъ имѣть значенія вѣроятной погрѣшности въ прежнемъ смыслѣ; потому что мы вовсе не можемъ приписать вѣроятности равной половинѣ предположенію, что всѣ величины ξ_k не выходятъ соотвѣтственно изъ предѣловъ

$$\xi_k \pm \frac{0,47694}{\sqrt{p_k}},$$

гдѣ p_k есть вѣсъ вывода ξ_k. Такое предположеніе есть сложное и вѣроятность его необходимо менѣе той, которая выведена для отдѣльнаго неизвѣстнаго, независимо отъ другихъ; слѣд. истинныя вѣроятныя погрѣшности неизвѣстныхъ будутъ болѣе обыкновенно принимаемыхъ по теоріи Гаусса. Общепринятый способъ вычисленія вѣроятныхъ погрѣшностей приводитъ въ случаѣ многихъ неизвѣстныхъ къ совершенно неправильнымъ заключеніямъ о степени точности результатовъ и вѣроятные предѣлы погрѣшностей, какъ увидимъ въ слѣдующей главѣ, даже при двухъ только неизвѣстныхъ почти вдвое болѣе тѣхъ, которые назначаются по обыкновенному до сихъ поръ способу.

§ 32.

Вышеизложенный способъ находить вѣсы выводовъ имѣетъ въ аналитическомъ отношеніи то неудобство, что съ помощію его опредѣляется вѣсъ только того неизвѣстнаго, которое въ порядкѣ исключенія оставалось послѣднимъ, и для опредѣленія вѣсовъ другихъ выводовъ нужно для каждаго выполнить особое исключеніе. Чтобы придать рѣшенію этаго вопроса совершенную общность, Гауссъ предложилъ слѣдующее весьма простое средство. Опредѣлимъ изъ уравненій (II) величины $x_1, x_2 \ldots x_n$; онѣ будутъ выражены черезъ $A_1, A_2 \ldots A_n$ и мы получимъ

$$\begin{aligned}
x_1 &= \xi_1 + \frac{A_1}{\alpha_1^{(1)}} + \frac{A_2}{\alpha_2^{(1)}} + \frac{A_3}{\alpha_3^{(1)}} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{\alpha_n^{(1)}} \\
x_2 &= \xi_2 + \frac{A_1}{\alpha_1^{(2)}} + \frac{A_2}{\alpha_2^{(2)}} + \frac{A_3}{\alpha_3^{(2)}} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{\alpha_n^{(2)}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_k &= \xi_k + \frac{A_1}{\alpha_1^{(k)}} + \frac{A_2}{\alpha_2^{(k)}} + \ldots + \frac{A_k}{\alpha_k^{(k)}} + \ldots + \frac{A_n}{\alpha_n^{(k)}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \xi_n + \frac{A_1}{\alpha_1^{(n)}} + \frac{A_2}{\alpha_2^{(n)}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{A_n}{\alpha_n^{(n)}}
\end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

Въ представленныхъ такимъ образомъ величинахъ x_k вообще будетъ вѣсъ вывода ξ_k равенъ дѣлителю при A_k въ выраженіи x_k т. е. $\alpha_k^{(k)}$; такъ что вѣсъ ξ_1 есть $\alpha_1^{(1)}$; вѣсъ ξ_2 есть $\alpha_2^{(2)}$ и т. д.

Чтобы доказать это, обратимся къ результату x_n, полученному чрезъ исключеніе; мы нашли

$$x_n = \xi_n + \frac{Q_n}{p_n},$$

гдѣ черезъ p_n означенъ вѣсъ вывода ξ_n, равный $\Sigma q_{i,n}^2$. Посмотримъ, какъ выражается Q_n черезъ $A_1, A_2 \ldots A_n$. Мы видѣли выше, что величины $B_2, C_3, D_4 \ldots$ выражаются чрезъ предыдущія слѣдующимъ образомъ:

$$B_2 = A_2 - \frac{\Sigma a_{i,1} a_{i,2}}{\Sigma a_{i,1}^2} A_1 \text{ и вообще } B_l = A_l - \frac{\Sigma a_{i,1} a_{i,l}}{\Sigma a_{i,1}^2} A_1$$

$$C_3 = B_3 - \frac{\Sigma b_{i,2} b_{i,3}}{\Sigma b_{i,2}^2} B_2 \text{ и вообще } C_l = B_l - \frac{\Sigma b_{i,2} b_{i,l}}{\Sigma b_{i,2}^2} B_2$$

. . . .

Замѣняя послѣдовательно $B_2, B_3, C_3, C_4, D_4, D_5$ и т. д. ихъ величинами, выраженными черезъ $A_1, A_2 \ldots A_n$ мы опредѣлимъ всѣ $B_2, C_3, D_4 \ldots$ черезъ $A_1, A_2 \ldots A_n$ и легко замѣтимъ, что въ выраженіи B_2 коэффиціентъ при A_2 равенъ единицѣ и вообще только при A_2; въ выраженіи C_3 только при A_3, въ D_4 только при A_4 и т. д., наконецъ въ выраженіи Q_n коэффиціентъ будетъ равенъ единицѣ только при A_n и слѣд. Q_n необходимо имѣетъ видъ:

$$Q_n = k_1 A_1 + k_2 A_2 + \ldots + k_{n-1} A_{n-1} + A_n$$

и потому x_n будетъ необходимо вида:

$$x_n = \xi_n + \frac{A_1}{\alpha_1^{(n)}} + \frac{A_2}{\alpha^{2(n)}} + \ldots + \frac{A_n}{p_n}$$

т. е. $p_n = \alpha_n^{(n)}$; такъ какъ выраженія всѣхъ x_k черезъ $A_1, A_2 \ldots A_n$ совершенно сходны между собою, то необходимо должны тоже самое заключить и о другихъ неизвѣстныхъ.

§ 33.

Впослѣдствіи, когда Лапласомъ былъ доказанъ способъ наименьшихъ квадратовъ независимо отъ закона случайныхъ погрѣшностей, Гауссъ далъ новую, совершенно общую теорію способа наименьшихъ квадратовъ; этой теоріи посвящены два его мемуара, представленные Геттингенскому Королевскому Обществу въ 1821 и 1823 годахъ и дополненіе къ нимъ, относящееся къ 1826 году. Всѣ выводы и слѣдствія изъ свойства наименьшей суммы квадратовъ погрѣшностей, все, что касается до приложеній теоріи къ практическимъ вопросамъ, разрѣшено въ этихъ мемуарахъ въ самомъ общемъ видѣ и, если оставимъ въ сторонѣ замѣченную выше неправильность при опредѣленіи вѣроятныхъ предѣловъ погрѣшностей результатовъ, вопросъ о приложеніяхъ способа наименьшихъ квадратовъ, благодаря трудамъ Гаусса, можно считать разработаннымъ до полной степени совершенства. Но нельзя не сказать, что принципъ, на которомъ Гауссъ въ своей общей теоріи основываетъ доказательство способа наименьшихъ квадратовъ, самъ по себѣ есть совершенно произвольный и не подтвержденъ достаточными доказательствами. Гауссъ признаетъ именно a priori, что наивыгоднѣйшее опредѣленіе неизвѣстныхъ будетъ то, при которомъ средняя ошибка получаетъ наименьшую величину, разумѣя подъ именемъ средней ошибки величину

$$m = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi\varepsilon d\varepsilon}$$

т. е. корень изъ средняго квадрата погрѣшностей; Гауссъ допускаетъ опредѣленіе ея изъ суммы квадратовъ погрѣшностей, раздѣленной на число наблюденій, слѣд., правило наименьшихъ квадратовъ, собственно говоря, скрывается уже въ этомъ положеніи. Основная мысль способа наименьшихъ квадратовъ состоитъ въ томъ, что вѣроятные предѣлы погрѣшностей пропорціональны средней ошибкѣ, какъ мы это дѣйствительно видѣли при частномъ законѣ вѣроятности погрѣшностей и при доказательствѣ ариѳметической среды; строгій анализъ Лапласа показываетъ, что эта пропорціональность справедлива только при условіи большаго числа наблюденій и потому Гауссъ безъ сомнѣнія приписывалъ своему положенію, допускающему бездоказательно пропорціональность средней и вѣроятной погрѣшности, слишкомъ большое значеніе, говоря, что съ помощію его доказывается способъ наименьшихъ квадратовъ независимо отъ числа наблюденій.

Принявъ такимъ образомъ среднюю погрѣшность за мѣру неточности результата, Гауссъ называетъ количество обратно пропорціональное средней ошибкѣ *мѣрою точности* и количество пропорціональное квадрату мѣры точности — *вѣсомъ результата*.

§ 34.

Посмотримъ теперь, какъ изъ этого общаго начала, выводятся наивыгоднѣйшіе результаты и вѣсы ихъ. Помножимъ уравненія (I) (§ 27) по порядку на множителей $K_{1,l}, K_{2,l} \dots K_{i,l} \dots K_{s,l}$ и потомъ сложимъ; чтобы послѣ этого преобразованія получить прямо величину x_l стоитъ только s коэффиціентовъ K опредѣлить такъ, чтобы коэффиціентъ при x_l обращался въ единицу, а коэффиціенты при прочихъ неизвѣстныхъ въ нуль; отбирая въ суммѣ

$$\sum \left[K_{i,l} \, \mathbf{S}_1^n a_{i,k} x_k \right] - \sum K_{i,l} \omega_i = \sum K_{i,l} \varepsilon_i$$

коэффиціенты при $x_1, x_2 \dots$, получимъ слѣдовательно уравненія:

$$\begin{aligned} \sum K_{i,l} a_{i,1} &= 0 \\ \sum K_{i,l} a_{i,2} &= 0 \\ \dots\dots&\dots \\ \sum K_{i,l} a_{i,l} &= 1 \\ \dots\dots&\dots \\ \sum K_{i,l} a_{i,n} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(VI)}$$

число уравненій n недостаточно для опредѣленія s множителей K и слѣд. они остаются произвольными. Удовлетворивъ равненіямъ (VI), будемъ имѣть просто

$$x_l = \sum K_{i,l}\omega_i + \sum K_{i,l}\varepsilon_i$$

Если бы мы взяли уравненія (I) прямо въ томъ видѣ, какъ они получаются изъ условій вопроса, предполагая наблюденія точными, то есть, допустили бы $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 0$; то получили бы

$$x_l = \sum K_{i,l}\omega_i;$$

слѣд. $\Sigma K_{i,l}\varepsilon_i$ представляетъ вліяніе погрѣшностей наблюденій на результатъ x_l, т. е. погрѣшность этого результата; мы видимъ, что эта погрѣшность зависитъ не только отъ погрѣшностей наблюденій ε_i, но и отъ выбора коэффиціентовъ $K_{i,l}$, т. е отъ способа сочетанія наблюденій. *Чтобы опредѣлить среднюю погрѣшность въ опредѣленіи* α_l *мы должны найти* среднее значеніе квадрата погрѣшности $\Sigma K_{i,l}\varepsilon_i$. Разлагая квадратъ этой суммы, находимъ

$$\sum K_{i,l}^2\varepsilon_i^2 + \sum K_{i,l}K_{i,l}'\,\varepsilon_i\varepsilon_i'$$

Среднее значеніе получится, если умножимъ каждый членъ этихъ суммъ соотвѣтсвенно на $\varphi\varepsilon_i d\varepsilon_i$ и возмемъ интегралъ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Замѣчая при этомъ, что вообще

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_i^2\varphi\varepsilon_i d\varepsilon_i = m_i^2 \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_i\varphi\varepsilon_i d\varepsilon_i = 0$$

получаемъ очевидно для средней величины квадрата погрѣшности x_l выраженіе

$$\sum K_{i,l}^2 m_i^2$$

и слѣд. самая средняя ошибка въ опредѣленіи x_l будетъ

$$\sqrt{\sum K_{i,l}^2 m_i^2}$$

На основаніи предложеннаго выше принципа, наивыгоднѣйшее опредѣленіе x_l будетъ то, при которомъ $\sqrt{\Sigma K_{i,l}^2 m_i^2}$ получаетъ наименьшую величину. Если всѣ наблюденія одинаково точны, т. е. имѣютъ одинаковую *среднюю погрѣшность*, что всегда можно допустить, когда извѣстны вѣсы наблюденій; то условіе наивыгоднѣйшаго опредѣленія x_l приводится просто къ наименьшей величинѣ $\Sigma K_{i,l}^2$. Вѣсъ вывода $x_l = \Sigma K_{i,l}\omega_i$ въ такомъ случаѣ есть $\frac{1}{\Sigma K_{i,l}^2}$.

Чтобы опредѣлить наименьшее значеніе $\Sigma K_{i,l}^2$, обратимся къ уравненіямъ (V) (§ 32). Подставимъ въ уравненіи

$$x_l = \xi_l + \frac{A_1}{\alpha_1^{(l)}} + \frac{A_2}{\alpha_2^{(l)}} + \dots + \frac{A_l}{\alpha_l^{(l)}} + \dots + \frac{A_n}{\alpha_n^{(l)}}$$

вмѣсто $A_1, A_2 \dots A_n$ ихъ величины, выраженныя черезъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_s$, т. е.

$$A_1 = \sum a_{i,1}\varepsilon_i = a_{1,1}\varepsilon_1 + a_{2,1}\varepsilon_2 + \dots + a_{s,1}\varepsilon_s$$

$$A_2 = \sum a_{i,2}\varepsilon_i = a_{1,2}\varepsilon_1 + a_{2,2}\varepsilon_2 + \dots + a_{s,2}\varepsilon_s \qquad \text{(VII)}$$

. . . .

$$A_n = \sum a_{i,n}\varepsilon_i = a_{1,n}\varepsilon_1 + a_{2,n}\varepsilon_2 + \dots + a_{s,n}\varepsilon_s$$

Собирая коэффиціенты при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$ и означая

$$\frac{a_{1,1}}{\alpha_1^{(l)}} + \frac{a_{1,2}}{\alpha_2^{(l)}} + \frac{a_{1,3}}{\alpha_3^{(l)}} + \dots + \frac{a_{1,n}}{\alpha_n^{(l)}} = \mathbf{S}_1^n \frac{a_{1,k}}{\alpha_k^{(l)}} = L_{1,l}$$

$$\frac{a_{2,1}}{\alpha_1^{(l)}} + \frac{a_{2,2}}{\alpha_2^{(l)}} + \frac{a_{2,3}}{\alpha_3^{(l)}} + \dots + \frac{a_{2,n}}{\alpha_n^{(l)}} = \mathbf{S}_1^n \frac{a_{2,k}}{\alpha_k^{(l)}} = L_{2,l} \qquad \text{(VIII)}$$

. . . .

$$\frac{a_{s,1}}{\alpha_1^{(l)}} + \frac{a_{s,2}}{\alpha_2^{(l)}} + \frac{a_{s,3}}{\alpha_3^{(l)}} + \dots + \frac{a_{s,n}}{\alpha_n^{(l)}} + \mathbf{S}_1^n \frac{a_{s,k}}{\alpha_k^{(l)}} = L_{s,l}$$

получимъ

$$x_l = \xi_l + \sum L_{i,l}\varepsilon;$$

кромѣ того, раздѣляя уравненія (II) (§ 27) послѣдовательно на $\alpha_1^{(l)}, \alpha_2^{(l)} \dots \alpha_n^{(l)}$, складывая ихъ потомъ между собою и сравнивая сумму съ выраженіемъ x_l черезъ $A_1, A_2 \dots A_n$, легко убѣдимся, что коэффиціенты $L_{1,l}$, $L_{2,l}$ и пр. удовлетворяютъ условіямъ (VI) и что

$$\xi_l = \sum L_{i,l}\omega_i$$

т. е.

$$x_l = \sum L_{i,l}\omega_i + \sum L_{i,l}\varepsilon_i;$$

слѣдовательно между коэффиціентами $K_{i,l}$ должно считать также коэффиціенты $L_{i,l}$. Вычитая два выраженія x_l одно изъ другаго, получимъ тождественное уравненіе

$$\sum L_{i,l}\omega_i - \sum K_{i,l}\omega_i = \sum (K_{i,l} - L_{i,l})\,\varepsilon_i,$$

которое должно быть удовлетворено независимо отъ величинъ $x_1, x_2 \ldots x_n$; такъ что, послѣ подстановки вмѣсто ε_i ихъ величинъ коэффиціенты при $x_1, x_2 \ldots$ должны необходимо обратиться въ нули, отчего получатся уравненія:

$$\sum (K_{i,l} - L_{i,l})\ a_{i,1} = 0$$

$$\sum (K_{i,l} - L_{i,l})\ a_{i,2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum (K_{i,l} - L_{i,l})\ a_{i,n} = 0$$

Раздѣляя ихъ послѣдовательно на $\alpha_1^{(l)}$; $\alpha_2^{(l)} \ldots\ \alpha_n^{(l)}$ и складывая, получимъ

$$\sum \left[(K_{i,l} - L_{i,l})\ \mathbf{S}_1^n\ \frac{a_{i,k}}{\alpha_k^{(l)}} \right] = 0$$

т. е.,

$$\sum \left[(K_{i,l} - L_{i,l})\ L_{i,l} \right] = 0,$$

что можно легко преобразовать въ

$$\sum L_{i,l}^2 = \sum K_{i,l}^2 - \sum (K_{i,l} - L_{i,l})^2,$$

откуда необходимо слѣдуетъ, что $\Sigma L_{i,l}^2$ есть наименьшая величина $\Sigma K_{i,l}^2$. Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что наивыгоднѣйшее опредѣленіе x_l есть $\xi_l = \Sigma L_{i,l}\omega_i$ и что вѣсъ этого опредѣленія, обратно пропорціональный средней ошибкѣ, ревенъ $\frac{1}{\Sigma L_{i,l}^2}$. Замѣняя въ ур. (VI) $K_{i,l}$ черезъ $L_{i,l}$, помножая ихъ послѣдовательно на $\frac{1}{\alpha_1^{(l)}}, \frac{1}{\alpha_2^{(l)}} \ldots \frac{1}{\alpha_n^{(l)}}$ и складывая, найдемъ

$$\sum \left[L_{i,l}\ \mathbf{S}_1^n\ \frac{a_{i,k}}{\alpha_k^{(l)}} \right] = \sum L_{i,l}^2 = \frac{1}{\alpha_l^{(l)}}$$

т. е. вѣсъ $\frac{1}{\Sigma L_{i,l}^2}$ по прежнему есть $\alpha_l^{(l)}$. Само собою понятно, что коэффиціенты $L_{i,l}$ соотвѣтствуютъ способу наименьшихъ квадратовъ, потому что полученные помощію этихъ множителей результаты $x_l = \xi_l$ удовлетворяютъ условіямъ $A_1 = 0$; $A_2 = 0$ и пр. т. е. $\sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = 0$; $\sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = 0$ и пр. и слѣд. наименьшей величинѣ $\Sigma \varepsilon_i^2$.

§ 35.

Въ заключеніе этого изложенія Гауссовыхъ изслѣдованій о способѣ наименьшихъ квадратовъ выведемъ замѣчательную формулу для выраженія средней ошибки наблюденій чрезъ сравненіе результатовъ съ наблюденіями. Для изысканія наивыгоднѣйшихъ результатовъ нѣтъ собственно надобности знать самыя среднія ошибки отдѣльныхъ наблюденій $m_1, m_2 \ldots m_s$; нужно знать только ихъ отношенія или вѣсы наблюденій $p_1, p_2 \ldots p_s$. Отъ помноженія каждаго наблюденія на квадратный корень изъ соотвѣтствующаго ему вѣса всѣ среднія ошибки приводятся къ одной величинѣ

$$m = m_1 \sqrt{p_1} = m_2 \sqrt{p_2} = \ldots = m_s \sqrt{p_s}$$

и если извѣстна величина m, то будутъ извѣстны и прочія величины $m_1, m_2 \ldots m_s$. Величина m, означающая среднюю погрѣшность тѣхъ наблюденій, вѣсъ которыхъ принятъ за единицу, можетъ быть вычислена a posteriori весьма приближенно при помощи полученныхъ уже результатовъ слѣдующимъ образомъ.

Если въ данныя изъ наблюденій уравненія подставимъ вмѣсто неизвѣстныхъ $x_1, x_2 \ldots x_n$ ихъ вѣроятнѣйшія величины $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$, опредѣленныя по способу наименьшихъ квадратовъ, то получимъ систему погрѣшностей $E_1, E_2 \ldots, E_s$ Величина средней ошибки вычисленная помощію этихъ погрѣшностей, т. е.

$$\sqrt{\frac{\Sigma E_i^2}{s}}$$

безъ сомнѣнія разнится отъ истинной величины и необходимо менѣе ея, потому что ΣE_i^2 есть наименьшее изъ всѣхъ возможныхъ значеній $\Sigma \varepsilon_i^2$. Чтобы получить болѣе точное опредѣленіе m, вычислимъ a posteriori вѣроятнѣйшее значеніе $\Sigma \varepsilon_i^2$. Для этого выразимъ $\Sigma \varepsilon_i^2$ въ видѣ

$$\sum \varepsilon_i^2 = A_1 (x_1 - \xi_1) + A_2 (x_2 - \xi_2) + \ldots + A_n (x_n - \xi_n) + \sum E_i^2 = \mathbf{S}_1^n A_k (x_k - \xi_k) + \sum E_i^2$$

къ которому ее легко привести слѣдующимъ образомъ: вычитая равенства

$$\sum \varepsilon_i^2 = \sum \left[\left(\mathbf{S}_1^n a_{i,k} x_k - \omega_i \right)^2 \right]$$

$$\sum E_i^2 = \sum \left[\left(\mathbf{S}_1^n a_{i,k} \xi_k - \omega_i \right)^2 \right]$$

соединяя суммы Σ и замѣняя разность квадратовъ произведеніемъ суммы на разность, мы получаемъ

$$\sum \varepsilon_i^2 - \sum E_i^2 = \sum \left[\left(\mathbf{S}_1^n a_{i,k} (x_k + \xi_k) - 2\omega_i \right) \left(\mathbf{S}_1^n a_{i,k} (x_k - \xi_k) \right) \right]$$

$$=\sum\left[\left(\mathbf{S}_i^n a_{i,k}x_k-\omega_i\right)\left(\mathbf{S}_i^n a_{i,k}(x_k-\xi_k)\right)\right]+\sum\left[\left(\mathbf{S}_i^n a_{i,k}\xi_k-\omega_i\right)\left(\mathbf{S}_i^n a_{i,k}(x_k-\xi_k)\right)\right]$$

По свойству величинъ ξ_k

$$\mathbf{S}_i^n a_{i,k}\xi_k-\omega_i=0$$

и слѣд. второй членъ уничтожается; величина же $\mathbf{S}_i^n a_{i,k}x_k-\omega_i$ есть ε_i; внося ее подъ знакъ S и обращая вниманіе на ур. (VII) (§ 34)

$$A_k=\sum a_{i,k}\varepsilon_i$$

мы находимъ требуемое выраженіе

$$\sum\varepsilon_i^2=\sum E_i^2+\mathbf{S}_i^n A_k(x_k-\xi_k)$$

Если положимъ, что истинныя величины $x_1, x_2 \dots x_n$, которымъ соотвѣтствуютъ дѣйствительныя погрѣшности $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_s$, суть $x_k=\xi_k+\Delta x_k$; то имѣемъ (§ 34)

$$x_k-\xi_k=\Delta x_k=\sum L_{i,k}\varepsilon_i$$

и подставляя находимъ

$$\sum\varepsilon_i^2=\sum E_i^2+\mathbf{S}_i^n\left[A_k\sum L_{i,k}\varepsilon_i\right]$$

Если черезъ m означимъ истинную величину средней ошибки, то при очень большомъ числѣ наблюденій $\Sigma\varepsilon_i^2$ имѣетъ весьма приближенно величину sm^2; среднее значеніе каждаго члена $A_k\Sigma L_{i,k}\varepsilon_i$ получимъ, если вставимъ на мѣсто A_k выраженія въ функціи погрѣшностей (ур. VII, § 34).

$$A_k=\sum a_{i,k}\varepsilon_i$$

По уничтоженіи произведеній $\varepsilon_i\varepsilon_i'$, средняя величина которыхъ равна нулю, останутся только члены, содержащіе квадраты ε_i^2, средняя величина которыхъ есть m^2; поэтому среднее значеніе $A_k\,\Sigma L_{i,k}\varepsilon_i$ будетъ $m^2\,\Sigma a_{i,k}\,L_{i,k}$ и слѣдовательно

$$sm^2=\sum E_i^2+m^2\,\mathbf{S}_i^n\left[\sum a_{i,k}\,L_{i,k}\right]$$

Но для результатовъ, опредѣленныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ, т. е посредствомъ множителей $L_{i,k}$, по условіямъ (VI) (§ 34) необходимо имѣемъ

$$\sum a_{i,k}\,L_{i,k}=1,$$

поэтому

$$\mathbf{S}_i^n\left[\sum a_{i,k}\ L_{i,k}\right]=n$$

и мы получаемъ

$$sm^2=\sum E_i^2+nm^2$$

откуда находимъ возможно точную величину средней ошибки, вычисленную a posteriori:

$$m=\sqrt{\frac{\Sigma E_i^2}{s-n}}.$$

Въ томъ случаѣ, когда уравненія имѣютъ различные вѣсы, величина s должна быть замѣнена выраженіемъ Σp_i и мы имѣемъ

$$m=\sqrt{\frac{\Sigma E_i^2}{\Sigma p_i-n}}.$$

§ 36.

Помощію Гауссовыхъ теорій вопросъ о наивыгоднѣйшемъ сочетаніи разрѣшается вполнѣ въ практическомъ отношеніи, потому что при сочетаніи наблюденій по способу наименьшихъ квадратовъ, къ которому приводятъ этѣ теоріи, устраняется всякая неопредѣленность въ соединеніи уравненій, полученныхъ изъ наблюденій; но ни частная, ни общая теорія Гаусса не даютъ намъ яснаго понятія о томъ, въ какой мѣрѣ и при какихъ обстоятельствахъ правило наименьшихъ квадратовъ можетъ дать благонадежные, приближающіеся къ истинѣ результаты. Между тѣмъ понятно, что на какихъ бы началахъ не основывалось рѣшеніе вопроса о наивыгоднѣйшемъ сочетаніи наблюденій, подверженныхъ случайнымъ ошибкамъ, заключенія могутъ оставаться справедливыми только въ извѣстныхъ границахъ. Въ частной теоріи Гаусса признается основнымъ началомъ правило ариѳметической среды, которое само по себѣ имѣетъ только приближенное значеніе, въ общей же теоріи Гаусса принято совершенно произвольное начало, требующее само по себѣ доказательства и поясненія. Оцѣнка справедливости этихъ началъ должна основываться на общихъ началахъ Теоріи Вѣроятностей; такимъ образомъ строгій анализъ Лапласа служитъ необходимымъ дополненіемъ и поясненіемъ общепринятыхъ Гауссовыхъ теорій.

Единственное ограниченіе, которому Лапласъ даетъ мѣсто въ своемъ доказательствѣ способа наименьшихъ квадратовъ, состоитъ въ допущеніи только такихъ сочетаній данныхъ уравненій, при которыхъ выводныя уравненія получаютъ линейный видъ; допущеніе необходимое, потому что во всякомъ другомъ случаѣ невозможны бы были приложенія теоріи къ практическимъ задачамъ по причинѣ чрезвычайно сложныхъ вычисленій. Это допущеніе совершенно подобно упомянутому въ §§ 4 и 10 выбору ариѳметической среды между другими средними выводами на основаніи не только большей простоты, но и существенной въ практическомъ отношеніи необходимости. Соединеніе данныхъ наблюденій, приведенныхъ въ линейныя функціи поправокъ, помощію постоянныхъ множителей есть именно то, которое вообще даетъ выводнымъ уравненіямъ линейный видъ; поэтому вопросъ о наивыгоднѣйшемъ линейномъ сочетаніи наблюденій приводится очевидно къ изысканію такихъ множителей, при которыхъ наиболѣе тѣсны предѣлы погрѣшностей неизвѣстныхъ, соотвѣтствующіе дан-

ной вѣроятности. Рѣшимъ этотъ вопросъ для того случая, когда уравненія содержатъ только одну неизвѣстную величину.

Помножимъ уравненія:

$$a_i x - \omega_i = \varepsilon_i$$

на произвольныхъ множителей K_i и, сложивъ полученныя произведенія, положимъ

$$K_1\varepsilon_1 + K_2\varepsilon_2 + \ldots + K_s\varepsilon_s = \Sigma K_i\varepsilon_i = 0;$$

тогда величина x опредѣлится изъ уравненія

$$x \Sigma K_i a_i - \Sigma K_i\omega_i = 0;$$

и будетъ

$$x = \frac{\Sigma K_i\omega_i}{\Sigma K_i a_i}.$$

Опредѣленіе это будетъ тѣмъ ближе къ истинѣ, чѣмъ болѣе вѣроятно предположеніе $\Sigma K_i\varepsilon_i = 0$; вѣроятность же этого предположенія зависитъ очевидно отъ выбора коэффиціентовъ K_i, слѣд. вопросъ о наивыгоднѣйшемъ опредѣленіи x приводится къ нахожденію такихъ коэффиціентовъ K_i, для которыхъ предположеніе $\Sigma K_i\varepsilon_i = 0$ имѣетъ наибольшую вѣроятность. Вообще невозможно найти такихъ величинъ для произвольныхъ K_i, для которыхъ бы уравненіе $\Sigma K_i\varepsilon_i = 0$ существовало въ строгомъ смыслѣ, потому что погрѣшности ε_i совершенно намъ неизвѣстны. Если положимъ $\Sigma K_i\varepsilon_i = l$, то выведенная выше величина x измѣнится и, называя погрѣшность ея черезъ Δx, будемъ имѣть

$$\Delta x = \frac{l}{\Sigma K_i a_i}.$$

§ 37.

Опредѣлимъ вѣроятность, что $\Sigma K_i\varepsilon_i$ заключается между предѣлами $\pm l$. Для этого нужно интегрировать функцію

$$p_l = \int\int\int \ldots \varphi\varepsilon_1\, \varphi\varepsilon_2 \ldots \varphi\varepsilon_s\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_s$$

между предѣлами, согласными съ этимъ предположеніемъ. Прилагая теорему Дирикле, получаемъ

$$p_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{+l} dl \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-l\alpha i} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_1 e^{K_1\varepsilon_1\alpha i} d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_2 e^{K_2\varepsilon_2\alpha i} \ldots\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_s e^{K_s\varepsilon_s\alpha i} d\varepsilon_s$$

или

$$p_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{+l} dl \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-l\alpha i} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_1 \cos K_1\varepsilon_1\alpha\, d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_2 \cos K_2\varepsilon_2\alpha d\varepsilon_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_s \cos K_s\varepsilon_s\alpha d\varepsilon_s$$

Означая p_l подъ видомъ

$$p_l = \int_{-l}^{+l} P_l dl$$

мы видимъ, что

$$P_l dl = \frac{dl}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-l\alpha i} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_1 \cos K_1\varepsilon_1\alpha d\varepsilon_1 \ldots\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_s \cos K_s\varepsilon_s\alpha d\varepsilon_s$$

есть вѣроятность, что сумма $\Sigma K_i\varepsilon_i$ равна числу l. Разлагая для приближеннаго исчисленія косинусы въ ряды и ограничиваясь вторыми степенями α, найдемъ вообще

$$\cos K_i\varepsilon_i\alpha = 1 - \frac{\varepsilon_i^2}{2} K_i^2 \alpha^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varepsilon_i \cos K_i\varepsilon_i \alpha \quad d\varepsilon_i = 1 - \frac{\mu_2}{2} K_i^2\alpha^2 = e^{-\frac{\mu_2}{2} K_i^2\alpha^2}$$

и, соединяя всѣ подобные интегралы, получимъ

$$P_l \; dl = \frac{dl}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(l\alpha i + \frac{\mu_2}{2} \; \Sigma \; K_i^2\alpha^2)} \; d\alpha.$$

Дополняя въ показателѣ до полнаго квадрата, найдемъ окончательно:

$$P_l dl = \frac{dl}{\sqrt{2\pi\mu_2 \Sigma K_i^2}} \; e^{-\frac{l^2}{2\mu_2 \Sigma K_i^2}}.$$

Изъ этого выраженія видно, что самая вѣроятная величина суммы $\Sigma K_i\varepsilon_i$ есть нуль. — Интегрируя, получимъ

$$p_l = \int_{-l}^{+l} P_l dl = 2\int_0^l P_l dl = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu_2 \Sigma K_i^2}} \int_0^l e^{-\frac{l^2}{2\mu_2 \Sigma K_i^2}} dl = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt, \text{ гдѣ } \tau = \frac{l}{\sqrt{2\mu_2 \Sigma K_i^2}}$$

Вѣроятность, что погрѣшность Δx въ опредѣленіи x помощію множителей K_i заключается между предѣлами $\pm \frac{l}{\Sigma K_i a_i}$ получится, если подставимъ вмѣсто l его величину $\Delta x . \Sigma K_i a_i$; эта вѣроятность будетъ

$$p_l = \frac{2 \, \Sigma K_i a_i}{\sqrt{2\pi\mu_2 \Sigma K_i^2}} \int_0^{\Delta x} e^{-\frac{(\Sigma K_i a_i)^2}{2\mu_2 \Sigma K_i^2} \Delta x^2} d\Delta x$$

Сдѣлаемъ $\Delta x \frac{\Sigma K_i a_i}{\sqrt{2\mu_2 \Sigma K_i^2}} = t$; тогда будемъ имѣть

$$p_t = \frac{2}{\sqrt{\ }} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

и p_t означаетъ вѣроятность, что погрѣшность Δx не превосходитъ предѣловъ

$$\pm t.\ \sqrt{2\mu_2}.\ \frac{\sqrt{K\Sigma_i^2}}{\Sigma K_i a_i}$$

При данной величинѣ t эта вѣроятность p_t остается постоянною и слѣд. предѣлы погрѣшности Δx пропорціональны во первыхъ $\sqrt{\mu_2}$ т. е. средней ошибкѣ наблюденій и во вторыхъ множителю $\frac{\sqrt{\Sigma K_i^2}}{\Sigma K_i a_i}$, зависящему отъ выбора коэффиціентовъ K_i. Такъ какъ этотъ результатъ выведемъ приближенно и только при условіи очень большаго числа наблюденій можетъ быть принятъ, какъ достовѣрный; то теперь мы видимъ, въ какой мѣрѣ справедливо положеніе, служащее основаніемъ общей теоріи Гаусса. Что касается до самаго выгоднаго выбора коэффиціентовъ K_i, то мы, чтобы сдѣлать предѣлы погрѣшностей при всякой вѣроятности возможно тѣсными, должны очевидно удовлетворить наименьшему значенію функціи

$$\frac{\sqrt{\Sigma K_i^2}}{\Sigma K_i a_i},$$

считая въ ней за перемѣнныя величины множители K_i. Приравнивая нулю производныя этой функціи, взятыя относительно каждой изъ величинъ $K_1, K_2 \ldots K_i \ldots K_s$ получимъ уравненія:

$$K_1 = \frac{\Sigma K_i^2}{\Sigma K_i a_i}\ a_1\ ;\ K_2 = \frac{\Sigma K_i^2}{\Sigma K_i a_i} a_2\ \ldots\ldots K_s = \frac{\Sigma K_i^2}{\Sigma K_i a_i} a_s$$

множитель $\frac{\Sigma K_i^2}{\Sigma K_i a_i}$ не зависитъ отъ i и одинаковъ для всѣхъ величинъ K_i, полагая его для краткости равнымъ λ, имѣемъ

$$K_1 = \lambda a_1\ ;\ K_2 = \lambda a_2 \ldots\ K_i = \lambda a_i \ldots\ K_s = \lambda a_s$$

и, подставляя эти величины въ выраженіе x, найдемъ его вѣроятнѣйшее значеніе ξ; именно

$$\xi = \frac{\Sigma a_i \omega_i}{\Sigma a_i^2}$$

результатъ, какъ мы уже видѣли не одинъ разъ проистекающій изъ условія наименьшей суммы квадратовъ погрѣшностей.

Наименьшая величина функціи $\frac{\sqrt{\Sigma K_i^2}}{\Sigma K_i a_i}$ будетъ $\frac{1}{\sqrt{\Sigma a_i^2}}$; въ этомъ можно убѣдиться также непосредственно, разсматривая тождественное равенство

$$[K_i a_i]^2 + (K_1 a_2 - K_2 a_1)^2 + (K_1 a_3 - K_2 a_1)^2 + \ldots = (\Sigma K_i^2) \cdot (\Sigma a_i^2)$$

изъ котораго прямо слѣдуетъ, что

$$\frac{\sqrt{\Sigma K_i^2}}{\Sigma K_i a_i} < \frac{1}{\sqrt{\Sigma a_i^2}}$$

первая часть неравенства обращается во вторую только въ предположеніи $K_i = \lambda a_i$, потому что только при этомъ условіи всѣ разности вида $K_i a_i' - K_i' a_i$ обращаются въ нули.

Лапласъ распространяетъ правило наименьшихъ квадратовъ на случай многихъ неизвѣстныхъ помощію подобнаго же анализа; мы не будемъ останавливаться на этомъ, потому что въ слѣдующей главѣ изложимъ совершенно общую теорію, основанія которой совершенно одинаковы съ тѣми, которыми руководствовался Лапласъ въ изслѣдованіяхъ о способѣ наименьшихъ квадратовъ.

ГЛАВА III.

Общая теорія изысканія наивыгоднѣйшихъ результатовъ при условіи линѣйнаго сочетанія наблюденій. Опредѣленіе вѣроятныхъ предѣловъ погрѣшностей выводовъ.

§ 38.

Представимъ теперь рѣшеніе вопроса о наивыгоднѣйшихъ результатахъ въ самомъ общемъ видѣ, ограничивая его однимъ только предположеніемъ, что выводныя уравненія должны имѣть линѣйный видъ. Самый общій пріемъ для соединенія уравненій (I) (§ 27) при такомъ условіи состоитъ въ томъ, что эти уравненія помножаются на произвольныхъ множителей и потомъ складываются между собою. Если будемъ разсматривать уравненія (I) въ томъ видѣ, какъ они получены изъ наблюденій, т. е. положимъ $\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = 0 \ldots \varepsilon_s = 0$: то помножая всѣ эти уравненія по порядку сперва на множителей

$$K_{1,1},\ K_{2,1},\ K_{3,1} \ldots\ K_{i,1} \ldots\ K_{s,1}$$

и складывая, потомъ помножая на другихъ множителей

$$K_{1,2},\ K_{2,2},\ K_{3,2},\ \ldots\ K_{i,2}\ \ldots\ K_{s,2}$$

и складывая, продолжая такимъ же образомъ и наконецъ останавливаясь на системѣ множителей:

$$K_{1,n},\ K_{2,n}\ \ldots\ K_{i,n} \ldots\ K_{s,n}$$

мы получимъ n уравненій для опредѣленія n неизвѣстныхъ $x_1,\ x_2 \ldots x_n$:

$$\begin{aligned}
K_{i,1} \mathbf{S}_1^n a_{i,k} x_k - \sum K_{i,1}\omega_i &= 0 \\
K_{i,2} \mathbf{S}_1^n a_{i,k} x_k - \sum K_{i,2}\omega_i &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
K_{i,n} \mathbf{S}_1^n a_{i,k} x_k - \sum K_{i,n}\omega_i &= 0
\end{aligned} \qquad (1)$$

или

$$\mathbf{S}_1^n\left[x_k\sum K_{i,1}a_{i,k}\right]-\sum K_{i,1}\omega_i=0$$
$$\mathbf{S}_1^n\left[x_k\sum K_{i,2}a_{i,k}\right]-\sum K_{i,2}\omega_i=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{S}_1^n\left[x_k\sum K_{i,n}a_{i,k}\right]-\sum K_{i,n}\omega_i=0$$

Чтобы изъ этихъ уравненій получить прямо величины $x_1, x_2 \dots x_n$, нужно только избрать такіе коэффиціенты K, которые удовлетворяли бы условіямъ:

$$\begin{array}{llll}\sum K_{i,1}a_{i,1}=1; & \sum K_{i,2}a_{i,1}=0; & \sum K_{i,k}a_{i,1}=0; & \sum K_{i,n}a_{i,1}=0;\\ \sum K_{i,1}a_{i,2}=0; & \sum K_{i,2}a_{i,2}=1; & \sum K_{i,k}a_{i,2}=0; & \sum K_{i,n}a_{i,2}=0;\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum K_{i,1}a_{i,k}=0; & \sum K_{i,2}a_{i,k}=0; & \sum K_{i,k}a_{i,k}=1; & \sum K_{i,n}a_{i,k}=0;\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum K_{i,1}a_{i,n}=0; & \sum K_{i,2}a_{i,n}=0; & \sum K_{i,k}a_{i,n}=0; & \sum K_{i,n}a_{i,n}=1;\end{array} \qquad (2)$$

Удовлетворивъ этимъ условіямъ, изъ уравненій (1) получимъ прямо

$$\begin{array}{l}x_1=\sum K_{i,1}\omega_i\\ x_2=\sum K_{i,2}\omega_i\\ \cdots\cdots\\ x_k=\sum K_{i,k}\omega_i\\ \cdots\cdots\\ x_n=\sum K_{i,n}\omega_i\end{array} \qquad (3)$$

Когда число s наблюденій больше числа n неизвѣстныхъ, условій (2) недостаточно для опредѣленія множителей K, потому что число этихъ множителей есть ns, а число условій n^2; слѣдовательно въ такомъ случаѣ $n(s-n)$ множителей остаются неопредѣленными. Если бы уравненія получаемыя помощію наблюденій не заключали въ себѣ неточностей, происходящихъ отъ погрѣшностей наблюденій, то всѣ они должны бы удовлетворяться нѣкото-

рыми величинами $x_1, x_2 .. x_n$, если только въ самой задачѣ нѣтъ неопредѣленности или несообразности. Въ такомъ случаѣ стоило бы только опредѣлить $x_1, x_2 ... x_n$ изъ n уравненій произвольно взятыхъ между уравненіями (1); прочія уравненія должны бы тождественно удовлетворяться найденными величинами $x_1, x_2 ... x_n$. Но, если наблюденія содержатъ погрѣшности, то выходитъ совсѣмъ другое: уравненія (1) неудовлетворяются одновременно никакими величинами, приписанными неизвѣстнымъ, и всегда получается во второй части нѣкоторая величина, отличная отъ нуля. Назовемъ черезъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 ... \varepsilon_s$ неизвѣстныя намъ величины погрѣшностей, сдѣланныя необходимо при измѣреніи $\omega_1, \omega_2 ... \omega_s$ и черезъ $\Delta x_1, \Delta x_2 ... \Delta x_n$ ошибки неизвѣстныхъ $x_1, x_2 ... x_n$, вычисленныхъ по ур. (3) въ предположеніи $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0 ....$ Подставляя вмѣсто ω_i истинныя значенія $\omega_i + \varepsilon_i$ и вмѣсто x_k точныя величины $x_k + \Delta x_k$, получимъ

$$x_k + \Delta x_k = \sum K_{i,k} (\omega_i + \varepsilon_i)$$

откуда

$$\Delta x_k = \sum K_{i,k} \varepsilon_i$$

слѣдовательно погрѣшности въ опредѣленіи неизвѣстныхъ зависятъ отъ погрѣшностей наблюденій и отъ коэффиціентовъ K. Такъ какъ величины ε_i вообще совершенно неизвѣстны, то нѣтъ никакой возможности найти точныя величины ошибокъ Δx_k и слѣд опредѣлить точно неизвѣстныя $x_1, x_2 .. x_n$; но вышеупомянутая неопредѣленность множителей K можетъ служить намъ средствомъ къ тому, чтобы сдѣлать вѣроятныя величины Δx_k возможно малыми и найти такимъ образомъ самыя выгодныя, возможно точныя величины для $x_1, x_2 ... x_n$. Чтобы достигнуть до этого, нужно прежде всего опредѣлить вѣроятность, что погрѣшности неизвѣстныхъ заключаются между нѣкоторыми предѣлами и потомъ опредѣлить при какихъ коэффиціентахъ K предѣлы погрѣшностей будутъ самые тѣсные; выборъ такихъ коэффиціентовъ поведетъ очевидно къ самому выгодному опредѣленію неизвѣстныхъ.

§ 39.

Каждой системѣ погрѣшностей ε_i соотвѣтствуетъ извѣстная система величинъ Δx_k, потому что всѣ онѣ опредѣляются черезъ ε_i помощію уравненій вида

$$\Delta x_k = \sum K_{i,k} \varepsilon_i;$$

изъ этого мы заключаемъ, что сложная вѣроятность погрѣшностей ε_i одного рода наблюденій:

$$p = \iiint .... \varphi\varepsilon_1 \varphi\varepsilon_2 ... \varphi\varepsilon_s d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 ... d\varepsilon_s$$

есть въ тоже время вѣроятность соотвѣтствующихъ величинъ Δx_k. Если погрѣшности неизвѣстныхъ $\Sigma K_{i,k} \varepsilon_i$ не должны превосходить соотвѣтственно предѣловъ $\pm r_k$, то въ выраженіи p интегралы должно распространить только на такія величины ε_i, которыя удовлетворяютъ этому условію. Прилагая къ этому случаю способъ Дирикле, мы должны элементъ интеграла помножить на функцію

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-r_1}^{+r_1} dr_1 \int_{-r_2}^{+r_2} dr_2 \ldots \int_{-r_n}^{+r_n} dr_n \iiint_{-\infty}^{+\infty} \ldots\; e^{-r_1\alpha_1 i - r_2\alpha_2 i - \ldots - r_n\alpha_n i}\, e^{i\mathbf{S}_1^n\,[\alpha_k\,\Sigma K_{i,k}\varepsilon_i]}\, d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

и распространить тогда предѣлы на всѣ возможныя величины ε_i, т. е. отъ $-\infty$ до $+\infty$. Вѣроятность, что погрѣшности Δx_1, $\Delta x_2 \ldots \Delta x_n$ равны именно r_1, $r_2 \ldots r_n$, есть

$$P\, dr_1 dr_2 \ldots dr_n,$$

гдѣ P есть относительная вѣроятность такого предположенія и

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\ldots e^{-i\,\mathbf{S}_1^n r_k\alpha_k} d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \iiint_{-\infty}^{+\infty}\ldots\; e^{i\,\mathbf{S}_1^n\,[\alpha_k\,\Sigma K_{i,k}\varepsilon_i]}\; \varphi\varepsilon_1\varphi\varepsilon_2 \ldots \varphi\varepsilon_s d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_s;$$

Равенство

$$\mathbf{S}_1^n\left[\alpha_k \sum K_{i,k}\varepsilon_i\right] = \sum\left[\varepsilon_i\, \mathbf{S}_1^n K_{i,k}\alpha_k\right]$$

доставляетъ возможность отдѣлить перемѣнныя въ интегралѣ, взятомъ относительно перемѣнныхъ ε_1, $\varepsilon_2 \ldots$ и мы получаемъ

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,\mathbf{S}_1^n r_k\alpha_k} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varepsilon_1\,\mathbf{S}_1^n K_{1,k}\alpha_k}\varphi\varepsilon_1 d\varepsilon_1 \ldots\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varepsilon_s\,\mathbf{S}_1^n K_{s,k}\alpha_k}\varphi\varepsilon_s d\varepsilon_s$$

Всѣ интегралы, относительно ε подобны между собою; разсмотримъ одинъ изъ нихъ, напр.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varepsilon_i\,\mathbf{S}_1^n K_{i,k}\alpha_k}\varphi\varepsilon_i d\varepsilon_i$$

Положимъ для краткости

$$\mathbf{S}_1^n K_{i,k}\alpha_k = S_i$$

и разложимъ показательную функцію въ рядъ; означая по прежнему

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^m\varphi\varepsilon d\varepsilon = \mu_m$$

получимъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varepsilon_i S_i} \varphi\varepsilon_i d\varepsilon_i = 1 + i\mu_1 S_i - \frac{\mu_2}{1.2} S_i^2 - i \frac{\mu_3}{1.2.3} S_i^3 + \frac{\mu_4}{1.2.3.4} S_i^4 + \ldots\ldots$$

или, обращая рядъ въ показательную функцію,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varepsilon_i S_i} \varphi\varepsilon_i d\varepsilon_i = e^{i\mu_1 S_i - \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2) S_i^2 - i \frac{\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3}{1.\ 2.\ 3} S_i^3 + \ldots}$$

называя для сокращенія коэффиціенты при S_i^3, S_i^4. .. черезъ M_3, M_4..., получимъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varepsilon_i S_i} \varphi\varepsilon_i d\varepsilon_i = e^{i\mu_1 S_i - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S_i^2 - i M_3 S_i^3 + M_4 S_i^4 + \ldots}$$

При однородныхъ наблюденіяхъ среднія величины μ_m суть величины постоянныя; вышеизложенные пріемы Гаусса даютъ возможность привести къ этому случаю и наблюденія разнаго достоинства и потому мы не уменьшаемъ общности вопроса, предполагая законъ вѣроятности погрѣшностей одинаковымъ для всѣхъ наблюденій. Среднія величины μ_1, μ_3.... при полномъ исключеніи постоянныхъ погрѣшностей обращаются въ нули; но такъ какъ подобное допущеніе мало упрощаетъ вычисленія, то мы ихъ удержимъ и въ такомъ случаѣ анализъ получаетъ болѣе общее значеніе, относясь и къ такимъ наблюденіямъ, для которыхъ извѣстна постоянная часть погрѣшностей.

§ 40.

Внесемъ теперь найденное выраженіе интеграла относительно ε_i въ величину P; соединяя всѣ другіе интегралы, выражающіеся точно такимъ же образомъ, въ одну показательную функцію, получимъ

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{S}_1^n r_k \alpha_k + i\mu_1 \Sigma S_i - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} \Sigma S_i^2 - i M_3 \Sigma S_i^3 + M_4 \Sigma S_i^4 + \ldots} d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

Всѣ члены показателя зависятъ отъ перемѣнныхъ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, потому что

$$S_i = \mathrm{S}_1^n K_{i,k} \alpha_k$$

и

$$\Sigma\, S_i^m = \Sigma\, [\mathrm{S}_1^n K_{i,k}\, \alpha_k]^m = \Sigma\, [K_{i,1}\alpha_1 + K_{i,2}\alpha_2 + \ldots + K_{i,n}\alpha_n]^m;$$

не производя возвышенія въ степень и разложенія суммы Σ на отдѣльные члены, мы видимъ, что разложеніе ΣS_i^m состоитъ изъ членовъ порядка m относительно $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$. Первыя двѣ суммы ΣS_i и ΣS_i^2 будутъ:

$$\Sigma S_i = \Sigma S_1^n K_{i,k} \alpha_k = S_1^n [\alpha_k \Sigma K_{i,k}]$$

и

$$\Sigma S_i^2 = \Sigma [S^n_1 K_{i,k} \alpha_k]^2 = \Sigma [S^n_1 K_{i,k}^2 \alpha_k^2 + S(K_{i,k} K_{i,k'} \alpha_k \alpha_k')] = S^n_1 [\alpha_k^2 \Sigma K_{i,k}^2] + S[\alpha_k \alpha_k' \Sigma K_{i,k} K_{i,k'}],$$

гдѣ знакъ S безъ указателей распространяется на всѣ различныя между собою значенія k и k' между предѣлами 1 и n. Если условимся, что $k < k'$, то сумма S должна быть удвоена.

Оставляя въ показателѣ только тѣ члены, которые содержать первую и вторую степени α, обратимъ остальнаго множителя, зависящаго отъ высшихъ порядковъ α, въ рядъ; означая черезъ $N_3, N_4 \ldots$ члены этого разложенія, содержащіе $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ въ степеняхъ и произведеніяхъ третьяго, четвертаго и т. д. порядковъ, получимъ

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-iS_1^n r_k \alpha_k + i\mu_1 S_1^n (\alpha_k \Sigma K_{i,k}) - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} [S^n_1 (\alpha_k^2 \Sigma K_{i,k}^2) + (\alpha_k \alpha_k' \Sigma K_{i,k} K_{i,k'})]} [1 - i N_3 + N_4 - \ldots] \, d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

гдѣ

$$N_3 = \frac{\mu_3 - 3\mu_2 \mu_1 + 2\mu_1^2}{1.\ 2.\ 3} \Sigma [S_1^n K_{i,k} \alpha_k]^3$$

$$N_4 = \frac{\mu_4 - 4\mu_3 \mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2 \mu_1^2 - 6\mu_1^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \Sigma [S^n_1 K_{i,k} \alpha_k]^4$$

. . . .

Соединимъ въ показателѣ члены, зависящіе отъ первыхъ степеней α_k, получимъ

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-iS_1^n \alpha_k [r_k - \mu_1 \Sigma K_{i,k}] - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} [S_1^n (\alpha_k^2 \Sigma K_{i,k}^2) + S(\alpha_k \alpha_k' \Sigma K_{i,k} K_{i,k'})]} [1 - i N_3 + N_4 - \ldots] \, d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

§ 41.

Для приведенія этого интеграла къ простѣйшему виду Бьенеме употребляетъ слѣдующія преобразованія.

Можно во первыхъ вмѣсто разности $r_k - \mu_1 \Sigma K_{i,k}$ ввести новое перемѣнное; положимъ

$$r_k - \mu_1 \Sigma K_{i,k} = \lambda \rho_k$$

и

$$dr_k = \lambda \, d\rho_k;$$

множителемъ λ можемъ распорядиться такъ, чтобы выборъ его послужилъ къ нѣкоторымъ сокращеніямъ. Въ членѣ показателя, который зависитъ отъ вторыхъ измѣреній относительно α_k, можно уничтожить постояннаго множителя $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}$, положивъ

$$\alpha_k = \frac{z_k}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}} \text{ и } d\alpha_k = \frac{dz_k}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}};$$

тогда этотъ членъ обратится въ

$$S_1^n (z_k^2 \Sigma K_{i,k}^2) + S(z_k z_k' \Sigma K_{i,k} K_{i,k}')$$

и вѣроятность $P\,dr_1 dr_2 \ldots dr_n$ будетъ:

$$\frac{d\rho_1 \ldots d\rho_n}{\pi^n}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}}\right)^n \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\frac{\lambda}{\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}} S_1^n \rho_k z_k - S_1^n (z_k^2 \Sigma K_{i,k}^2) + S(z_k z_k' \Sigma K_{i,k} K_{i,k}')} [1 - iZ_3 + Z_4 - \ldots] dz_1 dz_2 \ldots dz_n$$

гдѣ черезъ $Z_3, Z_4 \ldots$ означено то, во что обратятся $N_3, N_4 \ldots$ отъ подстановки величинъ α_k; понятно что количества $Z_3, Z_4 \ldots$ будутъ третьяго, четвертаго и т. д. порядковъ относительно z_k. Выраженіе значительно упростится, если сдѣлаемъ

$$\lambda = \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}$$

и слѣдовательно

$$r_k = \mu_1 \Sigma K_{i,k} + \rho_k \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)} \qquad (4)$$

тогда получимъ

$$P\,dr_1 dr_2 \ldots dr_n = \frac{d\rho_1 d\rho_2 \ldots d\rho_n}{\pi^n} \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots e^{-2i S_1^n \rho_k z_k - S_1^n (z_k^2 \Sigma K_{i,k}^2) + S(z_k z_k' \Sigma K_{i,k} K_{i,k}')} [1 - iZ_3 + Z_4 - \ldots] dz_1 dz_2 \ldots dz_n$$

§ 42.

Окончательное преобразованіе этой функціи состоитъ въ отдѣленіи перемѣнныхъ, которыя въ первомъ членѣ показателя входятъ вмѣстѣ.

Для достиженія этой цѣли введемъ новую систему перемѣнныхъ $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, которыя приведемъ въ зависимость отъ $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ и еще отъ перемѣнныхъ $t_1, t_2 \ldots t_n$ помощію слѣдующихъ уравненій:

$$\begin{aligned}
y_1 &= h_{1,1} z_1 + h_{1,2} z_2 + h_{1,3} z_3 + \ldots + h_{1,k} z_k + \ldots + h_{1,n} z_n + t_1 i = S_1^n h_{1,k} z_k + t_1 i \\
y_2 &= h_{2,2} z_2 + h_{2,3} z_3 + \ldots + h_{2,k} z_k + \ldots + h_{2,n} z_n + t_2 i = S_2^n h_{2,k} z_k + t_2 i \\
y_3 &= h_{3,3} z_3 + \ldots + h_{3,k} z_k + \ldots + h_{3,n} z_n + t_3 i = S_3^n h_{3,k} z_k + t_3 i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_k &= h_{k,k} z_k + \ldots + h_{k,n} z_n + t_k i = S_k^n h_{k,k} z_k + t_k i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= h_{n,n} z_n + t_n i
\end{aligned}$$

Всѣ эти уравненія можно представить съ одной общей формѣ

$$y_l = \mathop{\mathrm{S}}_{k=l}^{k=n} h_{l,k} z_k + t_l i$$

Указатели при неопредѣленныхъ коэффиціентахъ оба распространяются отъ 1 до n и первый изъ нихъ относится къ порядку перемѣнныхъ y, а второй къ z. Показателя при i въ выраженіи вѣроятности p можно привести къ суммѣ квадратовъ перемѣнныхъ y и t выборомъ приличныхъ величинъ h и t. Возмемъ сумму квадратовъ всѣхъ возможныхъ значеній y_l; получимъ

$$\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=n}\left(y_l^2 + t_l^2 \right) = \mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=n}\left[\mathop{\mathrm{S}}_{k=l}^{k=n} h_{l,k} z_k \right]^2 + 2i \mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=n}\left[t_l \mathop{\mathrm{S}}_{k=l}^{k=n} h_{l,k} z_k \right];$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=n}\left[\mathop{\mathrm{S}}_{k=l}^{k=n} h_{l,k} z_k \right]^2 = \mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=n'} \mathop{\mathrm{S}}_{k=l}^{k=n} h_{l,k}^2 z_k^2 + 2 \mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=n} \mathop{\mathrm{S}}_{k=l}^{k=n} z_k z_k' h_{l,k} h_{l,k}';$$

въ послѣднемъ членѣ вторая сумма распространяется на всѣ значенія k и k' отъ l до n съ условіемъ $k' > k$; если разложимъ эту сумму на отдѣльные члены и соберемъ потомъ коэффиціенты при одинаковыхъ произведеніяхъ, то получимъ безъ труда

$$\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=n} \mathop{\mathrm{S}}_{k=l}^{k=n} z_k z_k' h_{l,k} h_{l,k}' = \mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=n} z_k z_k' \left(h_{1,k} h_{1,k}' + h_{2,k} h_{2,k}' + \ldots + h_{k,k} h_{k,k}' \right)$$

съ прежнимъ условіемъ $k' > k$; можно короче обозначить это разложеніе такъ:

$$\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=n} \mathop{\mathrm{S}}_{k=l}^{k=n} z_k z_k' h_{l,k} h_{l,k}' = \mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=n}\left[z_k z_k' \mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=k} h_{l,k} h_{l,k}' \right].$$

Изъ этого выраженія при частномъ предположеніи $k = k'$ получаемъ:

$$\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=n} \mathop{\mathrm{S}}_{k=l}^{k=n} z_k^2 h_{l,k}^2 = \mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=n}\left[z_k^2 \mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=k} h_{l,k}^2 \right]$$

Изъ того же выраженія по аналогіи должны допустить

$$\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=n}\left[t_l \mathop{\mathrm{S}}_{k=l}^{k=n} h_{l,k} z_k \right] = \mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=n} \mathop{\mathrm{S}}_{k=l}^{k=n} z_k h_{l,k} t_l = \mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=h}\left[z_k \mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=k} h_{l,k} t_l \right]$$

что впрочемъ легко подтвердить непосредственнымъ разложеніемъ. Вставляя найденныя выраженія суммъ и замѣчая, что $S_1^n(y_l^2+t_l^2)$ есть одно и тоже что $S_1^n(y_k^2+t_k^2)$, получимъ:

$$\mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=n}\left[y_k^2+t_k^2\right]=\mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=n}\left[z_k^2\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=k}h_{l,k}^2\right]+2\mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=n}\left[z_k z_k'\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=k}h_{l,k}h_{l,k'}\right]+2i\mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=n}\left[z_k\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=k}t_l h_{l,k}\right]$$

Возвратимся къ выраженію вѣроятности p; подчиняя указатели k и k' условію $k'>k$, мы имѣемъ

$$p=\frac{1}{\pi^n}\iiint d\rho_1\, d\rho_2\dots d\rho_n\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[S_1^n(z_k^2\Sigma K_{i,k}^2)+2S_1^n(z_k z_k'\Sigma K_{i,k}K_{i,k'})+2i\,S_1^n z_k\rho_k\right]}(1-i\,Z_3+Z_4-\dots)\,dz_1\,dz_2\dots dz_n$$

Сравнивая теперь почленно показателя при e въ выраженіи p съ величиною $S_1^n[y_k^2+t_k^2]$, мы видимъ что ихъ можно сдѣлать тождественными, подчиняя коэффиціенты h условіямъ:

$$\sum K_{i,k}^2=\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=k}h_{l,k}^2$$

$$\sum K_{i,k}K_{i,k'}=\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=k}h_{l,k}h_{l,k'}$$

и опредѣляя неизвѣстныя $\rho_1, \rho_2,\dots \rho_n$ чрезъ $t_1, t_2\dots t_n$ помощію уравненій:

$$\rho_k=\mathop{\mathrm{S}}_{l=1}^{l=k}t_l h_{l,k}$$

Очевидно что уравненій для опредѣленія h и t черезъ K и ρ будетъ именно столько, сколько нужно по числу различныхъ h и t. Давая числамъ k и k' всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до n получимъ для опредѣленія различныхъ h слѣдующія группы уравненій:

$$\begin{aligned}
&h_{1,1}^2=\Sigma K_{i,1}^2\\
&h_{1,2}^2+h_{2,2}^2=\Sigma K_{i,2}^2\\
&h_{1,3}^2+h_{2,3}^2+h_{3,3}^2=\Sigma K_{i,3}^2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&h_{1,k}^2+h_{2,k}^2+h_{3,k}^2\dots+h_{k,k}^2=\Sigma K_{i,k}^2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&h_{1,n}^2+h_{2,n}^2+h_{3,n}^2+\dots+h_{k,n}^2+\dots+h_{n,n}^2=\Sigma K_{i,n}^2
\end{aligned}$$

$$h_{1,1}\,h_{1,2} = \Sigma K_{i,1}\,K_{i,2}$$
$$h_{1,2}\,h_{1,3} + h_{2,2}\,h_{2,3} = \Sigma K_{i,2}\,K_{i,3}$$
$$h_{1,3}\,h_{1,4} + h_{2,3}\,h_{2,4} + h_{3,3}\,h_{3,4} = \Sigma K_{i,3}\,K_{i,4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h_{1,n-1}\,h_{1,n} + h_{2,n-1}\,h_{2,n} + h_{3,n-1}\,h_{3,n} + \cdots + h_{n-1,n-1}\,h_{n-1,n} = \Sigma K_{i,n-1}\,K_{i,n}$$

$$h_{1,1}\,h_{1,3} = \Sigma K_{i,1}\,K_{i,3}$$
$$h_{1,2}\,h_{1,4} + h_{2,2}\,h_{2,4} = \Sigma K_{i,2}\,K_{i,4} \qquad (5)$$
$$h_{1,3}\,h_{1,5} + h_{2,3}\,h_{2,5} + h_{3,3}\,h_{3,5} = \Sigma K_{i,3}\,K_{i,5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h_{1,n-2}\,h_{1,n} + h_{2,n-2}\,h_{2,n} + h_{3,n-2}\,h_{3,n} + \cdots + h_{n-2,n-2}\,h_{n-2,n} = \Sigma K_{i,n-2}\,K_{i,n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h_{1,1}\,h_{1,n-2} = \Sigma K_{i,1}\,K_{i,n-2}$$
$$h_{1,2}\,h_{1,n-1} + h_{2,2}\,h_{2,n-1} = \Sigma K_{i,2}\,K_{i,n-1}$$
$$h_{1,3}\,h_{1,n} + h_{2,3}\,h_{2,n} + h_{3,3}\,h_{3,n} = \Sigma K_{i,3}\,K_{i,n}$$

$$h_{1,1}\,h_{1,n-1} = \Sigma K_{i,1}\,K_{i,n-1}$$
$$h_{1,2}\,h_{1,n} = \Sigma K_{i,2}\,K_{i,n}$$

$$h_{1,1}\,h_{1,n} = \Sigma K_{i,1}\,K_{i,n}.$$

Въ первую группу входятъ всѣ h безъ исключенія и число ихъ есть $\frac{n(n+1)}{2}$, также какъ и число уравненій во всѣхъ группахъ. Для n различныхъ t имѣемъ n уравненій:

$$\rho_1 = h_{1,1}t_1$$
$$\rho_2 = h_{1,2}t_1 + h_{2,2}t_2$$
$$\rho_3 = h_{1,3}t_1 + h_{2,3}t_2 + h_{3,3}t_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6)$$
$$\rho_k = h_{1,k}t_1 + h_{2,k}t_2 + h_{3,k}t_3 + \cdots + h_{k,k}t_k$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho_n = h_{1,n}t_1 + h_{2,n}t_2 + h_{3,n}t_3 + \cdots + h_{k,n}t_k + \cdots + h_{n,n}t_n$$

§ 43.

Такимъ образомъ выраженіе вѣроятности p принимаетъ видъ:

$$p = \frac{1}{\pi^n}\iiint\cdots\, d\rho_1\, d\rho_2\ldots d\rho_n \iiint_{-\infty}^{+\infty}\cdots\, e^{-S^n_1(y_k^2+t_k^2)}\,[1 - i\,Z_3 + Z_4 - \ldots]\, dz_1\, dz_2\ldots dz_n$$

Что касается до входящихъ сюда функцій Z_3, Z_4 и т. д. то онѣ отъ подстановки вмѣсто z_1, $z_2 \ldots z_n$ ихъ выраженій въ функціи y_k и t_k обращаются сами въ функціи этихъ новыхъ перемѣнныхъ. Функція Z_3 будетъ содержать вообще произведенія третьяго порядка, составленныя, какъ изъ различныхъ y_k, такъ и изъ обѣихъ перемѣнныхъ вмѣстѣ; мнимыми будутъ только тѣ члены, въ которыхъ входятъ нечетныя степени t_k и слѣд. четныя порядки y_k; такъ что въ функціи iZ_3 мнимыми будутъ на оборотъ члены содержащіе произведенія нечетнаго порядка относительно y_k и четнаго относительно t_k. Въ составъ функціи Z_4 будутъ входить первыя четыре степени перемѣнныхъ y_k и t_k въ видѣ однородныхъ членовъ четвертаго порядка; мнимые члены будутъ нечетнаго порядка относительно каждаго изъ перемѣнныхъ. Подобныя же замѣчанія должно сдѣлать о прочихъ членахъ разложенія.

Приступая къ интегрированію, должно прежде всего выразить чрезъ новыя перемѣнныя дифференціальныя произведенія $d\rho_1 d\rho_2 \ldots d\rho_n$ и $dz_1 dz_2 \ldots dz_n$. Такъ какъ перемѣнныя $\rho_1, \rho_2, . \rho_n$ $z_1, z_2 \ldots z_n$ независимы между собою, то ихъ дифференціалы должны быть по общимъ правиламъ вычисляемы въ предположеніи всѣхъ прочихъ дифференціаловъ равными нулю. Основываясь на этомъ, изъ уравненій (6), полагая $d\rho_1 = 0, d\rho_2 = 0, d\rho_3 = 0 \ldots d\rho_{k-1} = 0$, находимъ вообще $dt_1 = 0, dt_2 = 0 \ldots dt_{k-1} = 0$, такъ что

$$d\rho_k = h_{k,k}\, dt_k$$

и слѣд.

$$d\rho_1 d\rho_2 \ldots d\rho_n = h_{1,1} h_{2,2} \ldots h_{n,n} dt_1 dt_2 \ldots dt_n$$

Точка такимъ же образомъ изъ уравненій (5) найдемъ

$$dy_1 dy_2 \ldots dy_n = h_{1,1} h_{2,2} \ldots h_{n,n}\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$$

Вслѣдствіе этихъ равенствъ выраженіе p обращается въ

$$p = \frac{1}{\pi^n} \iiint dt_1\, dt_2 \ldots dt_n \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-S^n_1 (y_k^2 + t_k^2)} \, [1 - i\, Z_3 + Z_4 - \ldots]\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n,$$

или по раздѣленіи перемѣнныхъ:

$$p = \frac{1}{\pi^n} \iiint e^{-t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_n^2} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2} [1 - i\, Z_3 + Z_4 - \ldots]\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

§ 44.

Интегралъ перваго члена во второмъ интегралѣ находится прямо:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2} dy_1\, dy_2 \ldots dy_n = (\sqrt{\pi})^n$$

Интегрированіе прочихъ членовъ, содержащихъ цѣлыя и положительныя степени y, также всегда возможно въ конечномъ видѣ: оно приводится къ извѣстнымъ интеграламъ вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^m e^{-y^2} dy.$$

Такъ какъ при нечетномъ m такіе интегралы обращаются въ нуль, то, на основаніи сказаннаго выше о составѣ функцій iZ_3, Z_4...., въ выраженіи p исчезаютъ всѣ мнимые члены; поэтому интегралъ содержащій функцію iZ_3 обращается въ сумму членовъ 3-й и 1-й степени относительно t; интегралъ содержащій Z_4—въ функцію того же перемѣннаго не выше четвертой степени и т. д. Означая этѣ функціи черезъ T_3, T_4 и т. д. получимъ:

$$p = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \iiint e^{-t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_n^2} (1 + T_3 + T_4 + \ldots)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n;$$

предѣлы многократнаго интеграла данные первоначально должны быть очевидно преобразованы сообразно съ выраженіемъ предѣловъ $r_1, r_2 .. r_n$ погрѣшностей Δx_1, $\Delta x_2 ... \Delta x_n$ въ функціи перемѣнныхъ $t_1, t_2 .. t_n$. Не останавливаясь на выводѣ этихъ выраженій мы можемъ видѣть, что назначеннымъ въ началѣ противоположнымъ предѣламъ $\pm r_1, \pm r_2 ... \pm r_n$ будутъ соотвѣтствовать въ послѣднемъ выраженіи p также противоположные, но равные по числовой величинѣ, предѣлы относительно перемѣнныхъ $t_1, t_2 ... t_n$. Въ самомъ дѣлѣ, величины t (ур. 6. § 42) выражаются черезъ ρ линѣйными функціями безъ постоянныхъ членовъ и потому мѣняютъ только знакъ, когда перемѣняются знаки при всѣхъ ρ; величины же ρ должны перемѣнять знаки вмѣстѣ съ $r_1, r_2 .. r_n$, когда наблюденія освобождены отъ постоянныхъ погрѣшностей. т. е. когда $\mu_1 = 0$; и слѣдовательно въ этомъ случаѣ отъ перемѣны знака при всѣхъ величинахъ $r_1, r_2 ... r_n$ количества $t_1, t_2 ... t_n$ сдѣлаются также обратными, не измѣняясь въ числовой величинѣ. Въ томъ же случаѣ, когда μ_1 не равно нулю, мы можемъ сказать тоже самое, если за предѣлы погрѣшностей примемъ величины

$$\pm \left(r_k - \mu_1 \sum K_{i,k}\right),$$

какъ это видно изъ ур. (4) (§ 41) т. е. если освободимъ вѣроятныя погрѣшности r_k отъ вліянія на нихъ постоянныхъ погрѣшностей. Между противоположными предѣлами исчезнутъ въ выраженіи p всѣ члены, которые подъ знакомъ интеграла представляются въ видѣ нечетныхъ функцій; такъ совершенно уничтожится интегралъ, зависящій отъ T_3, потому что, какъ мы видѣли, въ T_3 входятъ только 1-я и 3-я степени перемѣнныхъ; тоже самое будетъ съ T_5, T_7.... Остальныя функціи T_4, T_6..... останутся и аналитическое изслѣдованіе вопроса, веденное до сихъ поръ съ полною строгостію, приводитъ насъ къ интегрированію безконечнаго ряда весьма сложныхъ выраженій.

§ 45.

Задача упрощается въ предположеніи очень большаго числа наблюденій; при этомъ условіи члены T_4, T_5.. становятся чрезвычайно малыми и ихъ можно откинуть; тогда мы получимъ просто:

$$p = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\iiint \dots e^{-t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_n^2} dt_1\, dt_2 \dots dt_n$$

Чтобы убѣдиться въ незначительности величинъ T_4, T_6... и вообще T_m, прослѣдимъ постепенное образованіе этихъ функцій. Количество N_m (§ 40) состоитъ изъ членовъ m-аго порядка относительно α; коэффиціенты этихъ членовъ суть суммы содержащія s членовъ и функція N_m будетъ вообще порядка sK^m, гдѣ K^m означаетъ среднюю величину m ыхъ степеней и произведеній m-аго порядка коэффиціентовъ $K_{i,l}$. Переходъ отъ перемѣнныхъ α къ z не измѣняетъ порядка N_m. Коэффиціенты h, какъ видно изъ уравненій (5) (§ 42), должны быть отнесены къ порядку $K\sqrt{s}$; при опредѣленіи z въ функціи y и t эти самые h будутъ въ знаменателяхъ входить однимъ порядкомъ больше нежели въ числителяхъ; слѣд. коэффиціенты при y и t въ выраженіяхъ z будутъ порядка $\frac{1}{K\sqrt{s}}$, а потому Z_m и T_m порядка $\frac{sK^m}{(K\sqrt{s})^m}$ т. е. $\frac{1}{s^{\frac{1}{2}m-1}}$; такимъ образомъ функціи T_4, T_6.. относятся къ порядкамъ $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2}$ ... и потому при большомъ s могутъ быть пренебрегаемы. Кромѣ того число членовъ составляющихъ N_m пропорціонально числу n и потому при большомъ n должно считать T_4, T_6.. количествами порядковъ $\frac{n}{s}$, $\frac{n}{s^2}$ . . ; изъ этого мы должны заключить, что при опущеніи членовъ T_4, T_6... степень приближенія анализа ослабѣваетъ съ возрастаніемъ числа искомыхъ количествъ, что впрочемъ понятно само собою.

§ 46.

Остается интегрировать рядъ функцій

$$\int_{-a}^{+a} e^{-t^2} dt$$

между данными предѣлами. Но такъ какъ подобные интегралы не могутъ быть найдены въ конечномъ видѣ, то для изысканія наивыгоднѣйшихъ коэффиціентовъ $K_{i,k}$ удобнѣе представить вопросъ нѣсколько иначе. Не назначая впередъ предѣловъ $\pm r_1$, $\pm r_2$... $\pm r_n$, можно подчинить перемѣнныя $t_1, t_2 \dots t_n$ какому нибудь аналитическому условію опредѣляя потомъ вѣроятность p сообразно съ этимъ условіемъ, найдемъ наибольшія возможныя величины для r_1, r_2. . r_n; онѣ будутъ зависѣть отъ $K_{i,k}$ и укажутъ на самый выгодный выборъ этихъ коэффиціентовъ.

Для простоты рѣшенія удобнѣе всего предположить, что $S_1^n t_k^2 = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2$ не превосходитъ даннаго предѣла γ^2; такое предположеніе не отнимаетъ отъ вопроса его общности, потому что, какіе бы предѣлы не были назначены для r, всегда существуетъ и предѣлъ γ^2; между тѣмъ интегрированіе въ этомъ случаѣ оказывается довольно простымъ.

§ 47.

Разсмотримъ прежде всего каковы наибольшія возможныя значенія перемѣнныхъ $\rho_1, \rho_2 \cdots \rho_n$ и слѣд. зависящихъ отъ нихъ предѣловъ погрѣшностей $r_1, r_2 \ldots r_n$, когда перемѣнныя $t_1, t_2 \ldots t_n$ подчинены условію

$$t_1^2 + t_2^2 \ldots + t_n^2 < \gamma^2$$

Изъ уравненій (6) (§ 42) имѣемъ

$$\rho_k = h_{1,k} t_1 = h_{2,k} t_2 + \ldots + h_{l,k} t_l + \ldots + h_{k,k} t_k$$

и величина ρ_k не зависитъ отъ остальныхъ перемѣнныхъ $t_{k+1} \ldots t_n$. Предположимъ, что $t_1, t_2 \ldots t_k$ должны удовлетворять уравненію

$$v_k = t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_l^2 + \ldots + t_k^2 = c^2,$$

гдѣ c есть постоянная величина; тогда условія наибольшей величины ρ_k будутъ:

$$\left(\frac{d\rho_k}{dt_1}\right) + \lambda \left(\frac{dv_k}{dt_1}\right) = 0;\ \left(\frac{d\rho_k}{dt_2}\right) + \lambda \left(\frac{dv_k}{dt_2}\right) = 0;\ \ldots\ \left(\frac{d\rho_k}{dt_k}\right) + \lambda \left(\frac{dv_k}{dt_k}\right) = 0,$$

гдѣ λ есть произвольный коэффиціентъ: исключая его, имѣемъ

$$\left(\frac{d\rho_k}{dt_1}\right) : \left(\frac{dv_k}{dt_1}\right) = \left(\frac{d\rho_k}{dt_2}\right) : \left(\frac{dv_k}{dt_2}\right) = \ldots = \left(\frac{d\rho_k}{dt_k}\right) : \left(\frac{dv_k}{dt_k}\right)$$

т. е.

$$\frac{h_{1,k}}{t_1} = \frac{h_{2,k}}{t_2} = \ldots = \frac{h_{k,k}}{t_k} = \pm \frac{\sqrt{h_{1,k}^2 + h_{2,k}^2 + \ldots + h_{k,k}^2}}{c}$$

Но § 42)

$$h_{1,k}^2 + h_{2,k}^2 + \ldots + h_{l,k}^2 + \ldots + h_{k,k}^2 = \Sigma K_{i,k}^2$$

слѣд.

$$\frac{h_{1,k}}{t_1} = \frac{h_{2,k}}{t_2} = \ldots = \frac{h_{k,k}}{t_k} = \pm c \sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}$$

Опредѣляя отсюда величины $t_1, t_2 \ldots t_k$ и подставляя ихъ въ выраженіе ρ_k, найдемъ наибольшую величину

$$R_k = \pm \frac{c}{\sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}} \left[h_{1,k}^2 + h_{2,k}^2 + \ldots + h_{k,k}^2\right] = \pm c. \sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}$$

Количество $c \sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}$ есть наибольшая числовая величина ρ_k; двойной знакъ показываетъ что она будетъ наибольшая или наименьшая, смотря потому будетъ ли взято c съ положительнымъ или съ отрицательнымъ знакомъ Постоянная величина c была взята произвольно

и R_k выходитъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе c; но очевидно что наибольшая возможная величина c, согласная съ предположеніемъ

$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 < \gamma^2$$

есть γ; слѣдовательно наибольшіе возможные предѣлы для ρ_k суть

$$R_k = \pm \gamma \sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}$$

т. е. для различныхъ ρ_k предѣлами будутъ величины:

$$R_1 = \pm \gamma \sqrt{\Sigma K_{i,1}^2}$$

$$R_2 = \pm \gamma \sqrt{\Sigma K_{i,2}^2}$$

. . . .

$$R_n = \pm \gamma \sqrt{\Sigma K_{i,n}^2}$$

Помощію этихъ величинъ уже нетрудно выразить предѣлы для погрѣшностей неизвѣстныхъ $\Delta x_1, \Delta x_2 .. \Delta x_n$, соотвѣтствующіе *данной* вѣроятности, т. е. *данной* величинѣ γ, изъ уравненій вида

$$r_k = \mu_1 \, \Sigma K_{i,k} + R_k \sqrt{2 (\mu_2 - \mu_1^2)}$$

Изъ выраженій R_k мы видимъ, что *предѣлы погрѣшностей для всякой вѣроятности* пропорціональны множителямъ $\sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}$ и слѣдовательно они будутъ тѣмъ тѣснѣе и опредѣленія неизвѣстныхъ тѣмъ благонадежнѣе, чѣмъ менѣе $\Sigma K_{i,k}^2$: такимъ образомъ для наивыгоднѣйшихъ результатовъ суммы $\Sigma K_{i,k}^2$ должны имѣть наименьшія величины. При изложеніи общей теоріи Гаусса во второй главѣ мы доказали, что этому условію удовлетворяютъ коэффиціенты $L_{i,k}$, соотвѣтствующіе способу наименьшихъ квадратовъ.

§ 48.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію вѣроятности, соотвѣтствующей данной величинѣ γ, т. е къ интегрированію выраженія

$$p = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \iiint . \; e^{-t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_n^2} dt_1 \, dt_2 .. \, dt_n$$

въ предположеніи, что $t_1^2 + t_2^2 + .. + t_n^2 < \gamma^2$. Если начнемъ интегрировать съ перемѣнной t_n, то предѣлы $\pm t'_n$, согласные съ предположеніемъ, должны быть выведены изъ уравненія

$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t'^2_n = \gamma^2;$$

откуда

$$t'_n = \pm\sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{n-1}^2}$$

послѣ этого нужно будетъ интегрировать относительно t_{n-1} функцію величины $\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{n-1}^2$; эта величина также какъ и $\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_n^2$, измѣняется между возможными предѣлами 0 и γ^2; слѣдовательно предѣлы для t_{n-1} должны быть выведены изъ уравненія

$$t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_{n-1}^2 = \gamma^2,$$

они будутъ

$$\pm\sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{n-2}^2};$$

подобнымъ же образомъ предѣлы вообще для перемѣнной t_k будутъ:

$$\pm\sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{k-1}^2}$$

Функціи подъ знаками интеграловъ всегда останутся четными, слѣдовательно вмѣсто противоположныхъ предѣловъ можно взять интегралы отъ нуля до положительной величины предѣла, удвоивая каждый разъ результаты. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$p = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^n \iiint \ldots e^{-t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_k^2 - \ldots - t_n^2} dt_1 dt_2 \ldots dt_k \ldots dt_n$$

гдѣ интегралы распространяются вообще отъ $t = 0$ до $t_k = \sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{k-1}^2}$.

§ 49.

Введемъ вмѣсто t_n новое перемѣнное u, опредѣляемое помощію уравненія:

$$t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_{n-1}^2 + t_n^2 = u^2,$$

откуда

$$t_n dt_n = u du, \quad t_n = \sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{n-1}^2}$$

Предѣлы относительно u, соотвѣтствующіе предѣламъ t_n, будутъ 0 и γ; слѣдовательно

$$p = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int_0^{\gamma} e^{-u^2} u du \iiint \frac{dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{n-1}^2}}$$

Входящій сюда многократный интегралъ приводится очень просто помощію уравненія (§ 5)

$$\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1} dy = \frac{\Gamma p . \Gamma q}{\Gamma(p+q)}.$$

Подставляя $y = \frac{t^2}{a^2}$ и $dy = 2\frac{t\,dt}{a^2}$, получаемъ

$$\int_0^a t^{2p-1}(a^2-t^2)^{q-1}dt = a^{2(p+q-1)}\cdot\frac{\Gamma p\,.\,\Gamma q}{2\,\Gamma(p+q)};$$

эта формула примѣняется очевидно къ интегралу:

$$U = \iiint\ldots\frac{dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-1}}{\sqrt{u^2-t_1{}^2-t_2{}^2-\ldots-t_{n-1}{}^2}},$$

если положимъ въ ней $2p-1=0$, т. е $p=\frac{1}{2}$, отчего она обращается въ

$$\int_0^a (a^2-t^2)^{q-1}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{2q-1}\cdot\frac{\Gamma q}{\Gamma(q+\frac{1}{2})}.$$

Чтобы взять въ u интегралъ относительно t_{n-1}, должно положить $a^2 = u^2 - t_1{}^2 - t_2{}^2 - \ldots - t_{n-2}{}^2$ и $q-1=-\frac{1}{2}$, т. е. $q=\frac{1}{2}$, отчего получимъ

$$U = \iiint\ldots dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-2}\int_0^a\frac{dt_{n-1}}{\sqrt{a^2-t_{n-1}{}^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma 1}\iiint\ldots dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-2};$$

это очевидно согласно съ результатомъ непосредственнаго интегрированія относительно t_{n-1}. Прилагая формулу второй разъ, сдѣлаемъ $a^2 = u^2 - t_1{}^2 - t_2{}^2 - \ldots - t_{n-3}{}^2$; $q-1=0$, т. е. $q=1$, тогда будетъ:

$$U = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma 1}\iiint dt_1\ldots dt_{n-3}\int_0^a dt_{n-2} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma 1}\cdot\frac{\Gamma 1}{\Gamma\frac{3}{2}}\iiint dt_1\ldots dt_{n-3}\sqrt{u^2-t_1{}^2-\ldots-t_{n-3}{}^2}$$

Для интегрированія по t_{n-3} имѣемъ $a^2 = u^2 - t_1{}^2 - t_2{}^2 - \ldots t_{n-4}{}^2$; $q-1=\frac{1}{2}$; $q=\frac{3}{2}$, и

$$U = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^3\frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma 1}\cdot\frac{\Gamma 1}{\Gamma\frac{3}{2}}\cdot\frac{\Gamma\frac{3}{2}}{\Gamma 2}\iiint dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-4}\,(u^2-t_1{}^2-t_2{}^2-\ldots-t_{n-4}{}^2)$$

Положивъ далѣе $a^2 = u^2 - t_1{}^2 - t_2{}^2 - \ldots - t_{n-5}{}^2$ и $q-1=1$, т. е. $q=2$ получаемъ:

$$U = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^4 \cdot \frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma 1} \cdot \frac{\Gamma 1}{\Gamma\frac{3}{2}} \cdot \frac{\Gamma\frac{3}{2}}{\Gamma 2} \; \frac{\Gamma 2}{\Gamma\frac{5}{2}} \iiint \ldots dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n-5} \left(u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{n-5}^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

И продолжая такимъ образомъ будемъ получать вообще при всякомъ k

$$U = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{k-1} \frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma 1} \; \frac{\Gamma 1}{\Gamma\frac{3}{2}} \; \frac{\Gamma\frac{3}{2}}{\Gamma 2} \; \frac{\Gamma\frac{k-1}{2}}{\Gamma\frac{k}{2}} \iiint \ldots dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-k} \left(u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{n-k}^2\right)^{\frac{k}{2}-1}$$

При $k = n$ освободимся совершенно отъ знака интеграла и такъ какъ въ этомъ случаѣ $a^2 = u^2$, то сокращая функціи Г въ числителяхъ и знаменателяхъ послѣдующихъ дробей, мы получимъ окончательно

$$U = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-1} u^{n-2} \frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\frac{n}{2}} = 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n \frac{u^{n-2}}{\Gamma\frac{n}{2}}$$

Вставляя это выраженіе въ p имѣемъ

$$p = \frac{2}{\Gamma\frac{n}{2}} \int_0^\gamma u^{n-1} e^{-u^2} du$$

При цѣлыхъ и положительныхъ величинахъ n этотъ интегралъ чрезъ разложеніе по частямъ приводится къ $\int_0^\gamma e^{-u^2} du$, когда n нечетное и обращается въ сумму конечныхъ членовъ когда n четное. Дѣйствительно, если, перемѣняя u^2 на z, означимъ

$$\int_0^\gamma u^{n-1} e^{-u^2} du = \tfrac{1}{2} \int_0^{\gamma^2} z^{\frac{1}{2}(n-2)} e^{-z} dz$$

и разложимъ послѣдній интегралъ по частямъ:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\gamma^2} z^{\frac{1}{2}(n-2)} e^{-z} dz = -\gamma^{n-2} \cdot \frac{e^{-\gamma^2}}{2} + \frac{n-2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\gamma^2} z^{\frac{1}{2}(n-2)} e^{-z} dz,$$

то получимъ чрезъ дальнѣйшее послѣдовательное разложеніе вообще:

$$\int_0^\gamma u^{n-1} e^{-u^2} du =$$

$$-\frac{e^{-\gamma^2}}{2}\left[\gamma^{n-2}+\frac{n-2}{2}\gamma^{n-4}+\dots+\frac{n-2}{2}\,\frac{n-4}{2}\dots\frac{n-2i}{2}\gamma^{n-2i-4}\right]+\frac{n-2}{2}\dots\frac{n-2i-2}{2}\int_0^\gamma u^{n-2i-3}e^{-u^2}du$$

Когда n четное, то полагая $n=2m$ и простирая разложеніе до $i=m-2$, дойдемъ до интеграла

$$\int_0^\gamma u\, e^{-u^2} du = \tfrac{1}{2}\left(1-e^{-\gamma^2}\right)$$

и слѣд.

$$\int_0^\gamma u^{2m-1} e^{-u^2} du =$$

$$-\frac{e^{-\gamma^2}}{2}\left[\gamma^{2m-2}+\frac{2m-2}{2}\gamma^{2m-4}+\dots+\frac{2m-2}{2}\cdot\frac{2m-4}{2}\dots\frac{2}{2}\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{4}{2}\dots\frac{2m-4}{2}\cdot\frac{2m-2}{2}$$

Для нечетнаго же $n=2m+1$, простирая разложеніе до $i=m-1$, приходимъ къ неприводимому интегралу $\int_0^\gamma e^{-u^2} du$ и получаемъ

$$\int_0^\gamma u^{2m} e^{-u^2} du =$$

$$-\frac{e^{-\gamma^2}}{2}\left[\gamma^{2m-1}+\frac{2m-1}{2}\gamma^{2m-3}+\dots+\frac{2m-1}{2}\cdot\frac{2m-3}{2}\dots\frac{3}{2}\gamma\right]+\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\dots\frac{2m-1}{2}\int_0^\gamma e^{-u^2}du$$

Введемъ въ эти выраженія для сокращенія функціи Γ; тогда на основаніи уравненія

$$\Gamma a = (a-1)\,\Gamma(a-1)$$

найдемъ:

$$\int_0^\gamma u^{2m-1} e^{-u^2} du = \tfrac{1}{2}\Gamma(m)\left[1 - e^{-\gamma^2}\left(\frac{\gamma^{2(m-1)}}{\Gamma(m)} + \frac{\gamma^{2(m-2)}}{\Gamma(m-1)} + \frac{\gamma^{2(m-3)}}{\Gamma(m-2)} + \dots + \frac{\gamma^2}{\Gamma(2)} + 1\right)\right]$$

$$\int_0^\gamma u^{2m} e^{-u^2} du = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-u^2} du - e^{-\gamma^2}\left[\frac{\gamma^{2m-1}}{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2m-3}}{\Gamma\left(\frac{2m-1}{2}\right)} + \dots + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]$$

Вставимъ эти выраженія въ величину p; означая черезъ p_{2m} и p_{2m+1} вѣроятности соотвѣтсвующія четному и нечетному числу наблюденій, получимъ:

$$p_{2m} = 1 - e^{-\gamma^2}\left[\frac{\gamma^{2(m-1)}}{\Gamma(m)} + \frac{\gamma^{2(m-2)}}{\Gamma(m-1)} + \dots + \frac{\gamma}{\Gamma(2)} + 1\right]$$

$$p_{2m+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-u^2} du - e^{-\gamma^2}\left[\frac{\gamma^{2m-1}}{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2m-3}}{\Gamma\left(\frac{2m-1}{2}\right)} + \dots + \frac{\gamma}{\Gamma\frac{3}{2}}\right]$$

Прежде подстановки мы убѣждаемся также, что производная $\frac{d\rho}{d\gamma}$ есть

$$\frac{d\rho}{d\gamma} = 2e^{-\gamma^2}\frac{\gamma^{n-1}}{\Gamma\frac{n}{2}}$$

Для положительныхъ величинъ γ эта производная сама всегда положительная, слѣд. вѣроятности p_{2m} и p_{2m+1} возрастаютъ въ одно время съ γ. Выраженія вѣроятностей зависятъ отъ числа неизвѣстныхъ $2m$ или $2m+1$ и при одинаковыхъ величинахъ γ вѣроятность становится тѣмъ меньше, чѣмъ больше число неизвѣстныхъ; при томъ выраженія вѣроятностей для четнаго и нечетнаго числа наблюденій совершенно различны.

§ 51.

Если опредѣлимъ такую величину γ, для которой соотвѣтствующая вѣроятность равна половинѣ и назовемъ ее черезъ γ', то количества

$$r_k = \mu_1 \Sigma L_{i,k} + R_k \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}$$

или при $\mu_1 = 0$

$$r_k = R_k \sqrt{2\mu^2}$$

т. е. величины

$$r_k = \pm\gamma' \sqrt{2\mu_2}\,\sqrt{\Sigma L_{i,k}^2} = \pm\gamma'\,\sqrt{2}\,\frac{m}{\sqrt{P_k}}$$

гдѣ P_k есть вѣсъ результата ξ_k, будутъ вѣроятныя погрѣшности неизвѣстныхъ x_k, опредѣленныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ. Величины γ' будутъ различны для различнаго числа неизвѣстныхъ: въ случаѣ одной неизвѣстной γ_1' найдется изъ уравненія

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma'_1} e^{-u^2}\, du = \frac{1}{2}$$

и будетъ, какъ мы замѣчали выше, равна 0,47694; при двухъ неизвѣстныхъ γ'_2 должно опредѣлить изъ уравненія

$$1 - e^{-\gamma'^2_2} = \tfrac{1}{2}$$

откуда $\gamma'_2 = \sqrt{lg2} = 0{,}83255$, т. е. вѣроятные предѣлы погрѣшностей почти вдвое болѣе, нежели при одной неизвѣстной. Вычисляя такимъ образомъ величины γ', въ предположеніи p_{2m} и p_{2m+1} равныхъ половинѣ, для различнаго числа неизвѣстныхъ, Бьенеме нашелъ:

$$\begin{aligned}
n &= 1 & \gamma'_1 &= 0{,}47694 \\
n &= 2 & \gamma'_2 &= 0{,}83255 = 1{,}7456\ \gamma'_1 \\
n &= 3 & \gamma'_3 &= 1{,}0876\ \ = 2{,}2814\ \gamma'_1 \\
n &= 4 & \gamma'_4 &= 1{,}29551 = 2{,}7164\ \gamma'_1 \\
n &= 5 & \gamma'_5 &= 1{,}4750\ \ = 3{,}0927\ \gamma'_1 \\
n &= 6 & \gamma'_6 &= 1{,}63525 = 3{,}4287\ \gamma'_1 \\
n &= 7 & \gamma'_7 &= 1{,}7812\ \ = 3{,}7347\ \gamma'_1 \\
n &= 8 & \gamma'_8 &= 1{,}91623 = 4{,}0178\ \gamma'_1
\end{aligned}$$

. . . .

такъ что при пяти неизвѣстныхъ предѣлы погрѣшностей слишкомъ втрое, а при восьми слишкомъ вчетверо болѣе обыкновенно принимаемыхъ.

Величиною вѣроятной ошибки вывода опредѣляется его точность и потому знаніе вѣроятной ошибки есть одна изъ самыхъ важныхъ задачъ теоріи наивыгоднѣйшихъ результатовъ; замѣна всѣхъ различныхъ величинъ γ'_n одною величиною γ'_1, какъ это дѣлается обыкновенно приводитъ къ совершенно неправильнымъ заключеніямъ о степени точности результатовъ; чтобы получить истинныя величины вѣроятныхъ погрѣшностей необходимо употреблять множители γ', соотвѣтственно числу опредѣляемыхъ неизвѣстныхъ. Величины вѣсовъ и средней ошибки наблюденій, какъ видно изъ послѣдняго выраженій r_k, остаются тѣже, какъ и въ прежнихъ теоріяхъ; поэтому исправленіе найденныхъ на обыкновенному способу вѣроятныхъ ошибокъ должно состоять просто въ помноженіи ихъ на вычисленные выше коэффиціенты при γ_1', употребляя тотъ изъ нихъ, который относится къ существующему въ задачѣ числу неизвѣстныхъ.

§ 52.

Соображая все изложенное выше, мы приходимъ къ тому убѣжденію, что значеніе способа наименьшихъ квадратовъ совершенно зависитъ отъ тѣхъ обстоятельствъ, при которыхъ

онъ прилагается къ рѣшенію практическихъ вопросовъ. Первымъ условіемъ для того, чтобы употребленіе этого способа было согласно съ своею цѣлію, должно считать по возможности полное исключеніе постоянныхъ погрѣшностей, особенно если въ расчетъ берутся наблюденія, произведенныя помощію разнообразныхъ способовъ и инструментовъ. Когда число наблюденій выполняющихъ это условіе очень велико и достоинства ихъ опредѣлены довольно точно, результаты способа наименьшихъ квадратовъ съ чрезвычайно большою вѣроятностію будутъ очень мало разниться отъ истинныхъ значеній искомыхъ количествъ и вліяніе случайныхъ ошибокъ будетъ устранено. Если же число наблюденій менѣе значительно, то данные предѣлы погрѣшностей имѣютъ не слишкомъ большую вѣроятность и кромѣ того самыя выраженія вѣроятностей перестаютъ быть точными отъ вліянія откидываемыхъ членовъ; вообще, когда число наблюденій не слишкомъ мало, выводы теоріи остаются достаточно справедливыми, что бы на нихъ полагаться при рѣшеніи практическихъ вопросовъ; къ такому случаю относится большая часть задачъ Астрономіи и Геодезіи, для которыхъ способъ наименьшихъ квадратовъ есть не только средство простѣйшаго сочетанія многочисленныхъ данныхъ, но также средство для полученія болѣе близкихъ къ истинѣ результатовъ. Наконецъ примѣненіе этого способа къ весьма небольшому числу данныхъ есть не болѣе какъ распространеніе по аналогіи на малое число наблюденій того пріема, который можетъ быть доказаннымъ и справедливымъ только для большихъ чиселъ; въ этомъ случаѣ всѣ тѣ положенія, которыя служатъ точкою исхода анализу случайныхъ явленій, перестаютъ имѣть какое либо значеніе, а слѣдовательно и выводы изъ нихъ теряютъ всякую достовѣрность и становятся произвольными, сохраняя, само собою разумѣется, характеръ среднихъ величинъ.

ГЛАВА IV.

Приложеніе способа наименьшихъ квадратовъ къ вычисленію поправокъ элементовъ кометы Донати 1858 года.

§ 53.

Въ дополненіе къ теоріи, изложенной выше, разсмотримъ въ этой послѣдней главѣ главнѣйшіе пріемы, употребляемые при практическихъ приложеніяхъ способа наименьшихъ квадратовъ; знаніе этихъ пріемовъ необходимо при числовыхъ вычисленіяхъ для того, чтобы избѣжать излишняго труда и чтобы постоянно имѣть повѣрки для убѣжденія въ отсутствіи ошибокъ.

Приложеніе способа наименьшихъ квадратовъ къ уравненіямъ уже приведеннымъ въ линейный видъ состоитъ изъ вычисленій въ общихъ чертахъ совершенно одинаковыхъ для большей части случаевъ; единственно важную особенность въ этомъ отношеніи представляетъ тотъ случай, когда неизвѣстныя, сверхъ уравненій данныхъ изъ наблюденій, должны удовлетворять въ точности нѣкоторымъ другимъ условіямъ; въ задачахъ Геодезіи къ такимъ условіямъ принадлежатъ напр. геометрическія соотношенія между частями треугольниковъ, входящихъ въ сѣть тріангуляціи. Изслѣдованію задачъ подобнаго рода посвящено дополненіе къ мемуарамъ Гаусса; на русскомъ языкѣ мы имѣемъ полную теорію вычисленія геодезическихъ измѣреній въ спеціальномъ руководствѣ Савича (*). Не останавливаясь на этой особенности возмемъ для примѣра задачу изъ области Астрономіи: опредѣлимъ поправки элементовъ блестящей кометы Донати, которая была видима у насъ въ теченіе всей осени 1858 года.

§ 54.

Чтобы избѣжать слишкомъ большихъ вычисленій возмемъ 20 наблюденій надъ склоненіями и прямыми восхожденіями кометы; изъ множества сдѣланныхъ наблюденій изберемъ такія, которыя по силѣ инструментовъ заслуживаютъ наибольшаго довѣрія и которыя притомъ обнимаютъ довольно большой промежутокъ времени, соотвѣтствующій значительной

(*) Приложеніе Теоріи Вѣроятностей къ вычисленію набл. и Геодез. измѣр. Сост. проф. Докторъ Савичъ. 1857.

12 *

дугѣ орбиты. Эти наблюденія, заимствованныя изъ *Astronomische Nachrichten, 1858 J.* и сообщенныя Директоромъ Московской Обсерваторіи Б. Я. Швейцеромъ, суть слѣдующія:

№			время наблюденія	α ☊	δ ☊
1	1858 г.	Іюня	16 въ $10^h\,43^m\,40.^s0$ Средн. Берлин. вр.	141° 30′ 35″.2	+ 25° 17′ 46″.2
2	—	Августа	7 — 9 25 38. 0 Средн. Берлин. вр.	150 8 41 .6	30 27 27 .6
3	—	—	7 — 8 16 58. 8 Средн. Вашинг. вр.	$10^h\ 0^m\ 48^s.29$	30 28 56 .46
4	—	Сентября	2 — 11 54 48. 7 Средн. Пулков. вр.	10 41 48 .81	34 28 43 .2
5	—	—	2 — 9 37 34. 2 Средн. Кенигс. вр.	160° 24′ 41″.8	34 27 53 .5
6	—	—	16 — 15 38 58. 4 Средн. Боннск. вр.	172 5 20. 8	36 26 41 .5
7	—	—	16 — 11 45 7. 3 Средн. Пулков. вр.	$11^h\ 27^m\ 17^s\ 50$	36 26 12 .0
8	—	—	24 — 21 20 37.3 Звѣзд. Москов. вр.	12 14 30 .53	35 12 17 .0
9	—	—	24 — 12 1 51. 3 Средн Пулков. вр.	12 15 36 .73	35 8 19 .8
10	—	—	24 — 6 33 23. 9 Средн. Гринич вр.	12 14 30 .93	35 12 20 .7
11	—	—	24 — 8 11 41 0 Средн Кенигсб. вр.	183° 38′ 54″.3	35 12 4 .8
12	—	Октября	3 — 7 8 46 1 Средн. Боннск. вр.	205 54 23 .7	24 35 23 .9
13	—	—	3 — 7 26 54. 4 Средн. Вашингт. вр.	$13^h\ 46^m\ 34^s.46$	24 2 42 .24
14	—	—	5 — 20 51 36. 5 Звѣзд. Москов. вр.	211° 50′ 57″.0	19 50 43 .0
15	—	—	5 — 6 56 27 7 Средн. Боннск. вр.	211 59 12″.7	19 43 38 .5
16	—	—	5 — 7 6 13. 8 Средн. Пулков. вр.	$14^h\ 7^m\ 14^s.10$	19 52 55 .9
17	—	—	5 — 6 26 14. 6 Средн Кенигс. вр.	211° 48′ 22″3.	+ 19 53 1 .4
18	—	—	16 — 6 19 23. 4 Средн Геттинг. вр	$16^h\ 15^m\ 19^s.70$	— 16 10 24 .9
19	—	—	16 — 5 56 41. 6 Средн. Боннск. вр.	243° 49′ 26″, 6	— 16 8 52 4
20	—	—	16 — 6 45 1 2 Средн. Вашинг вр.	$16^h\ 17^m\ 50^s.34$	— 16 53 57 .76

Здѣсь чрезъ α ☊ и δ ☊ означены прямыя восхожденія и склоненія кометы Мы не имѣемъ ни какихъ данныхъ для того, чтобы различить эти наблюденія относительно ихъ достоинства и потому припишемъ имъ одинаковый вѣсъ, который и примемъ за единицу. Нѣкоторыя изъ наблюденій съ намѣреніемъ выбраны приблизительно для одинаковаго времени, чтобы имѣть возможность еще уменьшить число уравненій, какъ увидимъ впослѣдствіи.

§ 55.

Неизвѣстныя величины въ нашемъ случаѣ суть 6 элементовъ эллиптическаго движенія кометы, опредѣляющіе вполнѣ положеніе плоскости орбиты, ея размѣры и положеніе кометы для даннаго времени, въ томъ предположеніи, что масса кометы можетъ быть пренебрежена въ сравненіи съ массою солнца. Будемъ означать искомые элементы слѣдующимъ образомъ:

Долготу восходящаго узла орбиты черезъ . . . . ☊

Наклоненіе орбиты къ эклиптикѣ. i

Долготу перихелія . . . . $\varPi$
Среднее суточное движеніе кометы. μ
Уголъ, синусъ котораго равенъ эксцентрицитету. . . . . φ
и среднюю долготу кометы въ орбитѣ для эпохи: именно для средняго Гриничскаго полдня 1-го Января 1858 года. . . . . N

Величины Ω, $\varPi$ и зависящія отъ нихъ, отнесемъ къ среднему положенію эклиптики во время эпохи, т. е къ среднему равноденствію 1858 года $0^h\,0^m\,0^s$ средн. Грин. вр.

Склоненія и прямыя восхожденія, равно какъ и всякія другія координаты получаемыя изъ нихъ чрезъ преобразованіе, напр. широты и долготы и др., мы должны разсматривать какъ функціи элементовъ кометы и времени, слѣд. называя черезъ ξ_i и ζ_i погрѣшности наблюденій, мы имѣемъ вообще

$$\alpha_i + \xi_i = F(t_i,\ \Omega,\ i,\ \varPi\ldots);\ \delta_i + \zeta_i = f\ (t_i,\ \Omega,\ i,\ \varPi\ldots)$$

или для долготы λ_i и широты β_i съ ихъ погрѣшностями η_i и ϑ_i

$$\lambda_i + \eta_i = \Phi\ (t_i,\ \Omega,\ i,\ \varPi\ldots);\ \beta_i + \vartheta_i = \phi\ (t_i,\ \Omega,\ i,\ \varPi\ldots)$$

Функціями F, f, Φ и ϕ выражаются тѣ соотношенія, которыя существуютъ между временемъ, элементами и координатами кометы вслѣдствіе законовъ эллиптическаго движенія и, если не принимаемъ въ расчетъ вліянія возмущеній, то только вслѣдствіе однихъ этихъ законовъ. Чтобы дать выраженіямъ α_i, δ_i и пр. линейный видъ, необходимый для приложенія способа наименьшихъ квадратовъ, нужно прежде всего найти приближенныя величины элементовъ. Для опредѣленія 6 элементовъ вообще необходимо и достаточно трехъ наблюденій, потому что каждое наблюденіе даетъ два уравненія. Прилагая способъ Гаусса (*) къ 1-му, 2-му и 14-му изъ наблюденій, предложенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, я получилъ слѣдующія элементы кометы, которые будемъ отличать отъ искомыхъ значкомъ 0:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_0 &= 165^\circ\ 18'\ \ 59''.99 \\ i_0 &= 116\ \ 57\ \ \ 30\ .38\ (^{**}) \\ \varPi_0 &= 294\ \ 25\ \ \ 39\ .85 \end{aligned}\right\}\ \text{Средн. равнод. 1858.0}$$

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \ 1''.954665 \\ \varphi_0 &= \ 84^\circ\ 56'\ \ 47''.27 \\ N_0 &= 294\ \ 16\ \ \ 46\ .30 \end{aligned}$$

Съ помощію этихъ элементовъ легко найти слѣдующія величины для нѣкоторыхъ обстоятельствъ движенія кометы:

Большая полуось орбиты 148.80675 средн. разст. земли отъ солнца
Малая полуось. . . . . . 13.107873 — — — — —

(*) Theoria motus corporum coelestium. Sect. IV.

(**) Движеніе кометы *обратное*; слѣдуя тѣмъ обозначеніямъ, при которыхъ различается прямое и обратное движеніе, выводимъ $i_0 = 63^\circ\ 2'\ 29''.62$; $\varPi_0 = 36^\circ\ 12'\ 20''.12$.

Эксцентрицитетъ. 0.9961127

Время прохожденія чрезъ перихелій 1858 г. 29 Сентября $23^h\ 6^m\ 53^s$ Ср. Гр. вр.

Время полнаго обращенія 1815.24 звѣзд. года.

§ 56.

Положимъ.

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega$$

$$i = i_0 + \Delta i \text{ и пр.}$$

и вставимъ эти выраженія въ $\alpha_i + \xi_i$ и т. д. Разлагая по Тейлоровой теоремѣ и довольствуясь первыми степенями поправокъ $\Delta\Omega$, Δi и пр. мы получимъ 40 линейныхъ уравненій, изъ которыхъ 20 будутъ вида:

$$\alpha_i + \xi_i = \alpha_{o,i} + G_a\Delta\Omega + H_a\Delta i + \ldots + Q_a\Delta\varphi,$$

или по долготѣ

$$\lambda_i + \eta_i = \lambda_{o,i} + A_l\Delta\Omega + B_l\Delta i + \ldots + F_l\Delta\varphi$$

и 20 уравненій:

$$\delta_i + \zeta_i = \delta_{o,i} + G_d\Delta\Omega + H_d\Delta i + \ldots + Q_d\Delta\varphi$$

или по широтѣ

$$\beta_i + \vartheta_i = \beta_{o,i} + A_b\Delta\Omega + B_b\Delta i + \ldots + F_b\Delta\varphi,$$

гдѣ $\alpha_{o,i}$ $\lambda_{o,i}$, $\delta_{o,i}$ и $\beta_{o,i}$ суть величины $F(t_i, \Omega_0, i_0 \ldots)$, $\Phi(t_i, \Omega_0, i_0 \ldots)$, $f(t_i, \Omega_0, i_0 \ldots)$, и $\phi(t_i, \Omega_0, i_0 \ldots)$ т. е. координаты кометы, вычисленныя для времени t_i изъ приближенныхъ элементовъ, а черезъ G_a, $H_a, \ldots G_d$, H_d. A_l, $B_l, \ldots A_b$, $B_b \ldots$ означены частныя первыя производныя соотвѣтствующихъ координатъ, вычисленныя такимъ же образомъ. Пользуясь правилами, изложенными въ *Theoria motus corporum coelestium* я получилъ для разностей:

$$\Delta\alpha_i = \alpha_{o,i} - \alpha_i \text{ и } \Delta\delta_i = \delta_{o,i} - \delta_i;$$

т. е. для уклоненій вычисленія отъ наблюденій слѣдующія величины:

Время и	№ наблюд.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Іюня 16 —	1	— 0''.02	+ 0''.01
Авг. 7	2	+ 0 .17	— 0 .18
	3	+ 23 .59	— 17 .86
Сент. 2	4	+ 11 .86	— 5 .70
	5	+ 19 .28	+ 1 .03
Сент. 16	6	+ 23 .95	+ 2 .53
	7	+ 25 .25	— 0 .79

		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Сент. 24	8	$+46''.31$	$-6''.37$
	9	$+34.31$	-3.67
	10	$+20.51$	-4.06
	11	$+29.11$	-7.40
Окт. 3	12	$+22.92$	-23.05
	13	$+25.44$	-16.90
Окт. 5	14	$+0.03$	-0.03
	15	$+24.16$	-23.39
	16	$+22.43$	-22.29
	17	$+25.15$	-21.52
Окт. 16	18	$+40.54$	-8.62
	19	-5.07	-5.26
	20	-5.56	-15.32

При вычисленіяхъ $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, также какъ и при всѣхъ послѣдующихъ до рѣшенія окончательныхъ уравненій, совершенно достаточно употреблять пятизначныя таблицы логориѳмовъ.

Въ теченіе небольшаго промежутка времени измѣненіе координатъ можно считать безъ большой погрѣшности пропорціональнымъ времени; пользуясь этимъ замѣчаніемъ мы можемъ соединить наблюденія, относящіяся къ одному и тому же дню по правилу ариѳметической среды; вслѣдствіе этого число уравненій въ нашемъ случаѣ уменьшится отъ 40 до 16. При этомъ мы должны приписать вновь полученнымъ уравненіямъ вѣсы во столько разъ большіе единицы, по скольку уравненій входитъ въ каждую группу, соединяемую по правилу ариѳметической среды. Такимъ образомъ мы получимъ 8, такъ называемыхъ, нормальныхъ положеній кометы:

№	Среднее Гринвч. вр. отъ начала 1858 г.	α ☊	δ ☊	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$	Вѣсы
1	167. 3955 ср. сут.	141°30′.6	+25°17′.8	— 0″.02	+ 0″.01	— 0″.02	+0″.008	1
2	219. 4451 — —	150 10.0	+30 28.3	+11 .88	— 9 .02	+13 .40	— 4 .71	2
3	245. 3691 — —	160 25.2	+34 28.6	+15 .57	— 2 .33	+13 .84	+ 3 .16	2
4	259. 5122 — —	171 57.5	+36 26.8	+24 .60	+ 1 .74	+19 .44	+ 10 57	2
5	267. 3075 — —	183 41.4	+35 11.7	+32 .56	— 5 .37	+31 .08	+ 7 .94	4
6	276. 3977 — —	206 16.0	+24 19.6	+34 .18	—19 .97	+33 .72	— 8 .76	2
7	278. 2256 — —	211 51.3	+19 50.4	+17 .94	—16 .80	+25 .70	— 8 .82	4
8	289. 3163 — —	244 1.7	+16 23.6	+ 9 97	— 9 .73	+11 .16	— 7 .91	3

Линейныя начальныя уравненія мы вычислимъ относительно широты и долготы; для этой цѣли мы помѣстили величины разностей $\Delta\lambda_i = \lambda_{o,i} - \lambda_i$ и $\Delta\beta_i = \beta_{o,i} - \beta_i$. Числа здѣсь сокращены, потому что большей точности не нужно при вычисленіяхъ въ пятизначными логориѳмами

§ 58.

Чтобы получить начальныя уравненія, остается вычислить коэффиціенты $A_l, B_l \dots$ и $A_b, B_b \dots$ и для приведенія уравненій къ общей мѣрѣ точности помножить ихъ на квадратные корни изъ соотвѣтствующихъ вѣсовъ. Вычисленіе коэффиціентовъ основывается на формулахъ эллиптическаго движенія (*Theoria motus corp. coel.*). Въ нашемъ случаѣ получаются слѣдующія 16 уравненій, во второй части которыхъ поставлены нули вмѣсто неизвѣстныхъ случайныхъ погрѣшностей η_l и ϑ_l.

a) относительно долготы

$$+1.24444\Delta\text{☊}-0.14836\Delta i-430.80\Delta N-72114\Delta\mu+430.39\Delta \Pi+7.4578\Delta\varphi-0{\cdot}000000097=0$$
$$+1.20920\Delta\text{☊}-0.39865\Delta i-723.20\Delta N-158704\Delta\mu+722.70\Delta \Pi+10.6770\Delta\varphi+0.000091872=0$$
$$+0.83064\Delta\text{☊}-0.60681\Delta i-678.22\Delta N-166550\Delta\mu+677.86\Delta \Pi+10\ 5102\Delta\varphi+0.000095110=0$$
$$+0.19790\Delta\text{☊}-0.80803\Delta i+50.54\Delta N+13117\Delta\mu-49.62\Delta \Pi+8.9356\Delta\varphi+0.000133290=0$$
$$-0.92534\Delta\text{☊}-1.31500\Delta i+2328.80\Delta N+622508\Delta\mu-2328.60\Delta \Pi+10.3950\Delta\varphi+0.000301360=0$$
$$-2.24390\Delta\text{☊}-0.79155\Delta i+5634.29\Delta N+1557250\Delta\mu-5633.37\Delta \Pi+2.2125\Delta\varphi+0.000232790=0$$
$$-3.40574\Delta\text{☊}-0.95028\Delta i+8896.60\Delta N+2475336\Delta\mu-8895.20\Delta \Pi-0.0174\Delta\varphi+0.000249190=0$$
$$-0.74817\Delta\text{☊}-0.02613\Delta\iota+4785\ 11\Delta N+1384410\Delta\mu-4384.78\Delta \Pi-18.6613\Delta\varphi+0.000093710=0$$

и *b*) относительно широты:

$$-0.63775\Delta\text{☊}-0.09807\Delta i+294.26\Delta N+49258\Delta\mu-293.57\Delta \Pi-10.9570\Delta\varphi+0.000000039=0$$
$$-0.63251\Delta\text{☊}-0.25238\Delta i+569.31\Delta N+124931\Delta\mu-568.66\Delta \Pi-14.1873\Delta\varphi-0.000032292=0$$
$$-0.59156\Delta\text{☊}-0.33779\Delta i+789.06\Delta N+193604\Delta\mu-788.64\Delta \Pi-15.1007\Delta\varphi+0.000021666=0$$
$$-0\ 57179\Delta\text{☊}-0\ 36328\Delta i+852\ 53\Delta N+221355\Delta\mu-852{,}20\Delta \Pi-16\ 9523\Delta\varphi+0.000072402=0$$
$$-0\ 60804\Delta\text{☊}-0.44442\Delta i+701.68\Delta N+187568\Delta\mu-701.44\Delta \Pi-28.3980\Delta\varphi+0.000076988=0$$
$$+0.55956\Delta\text{☊}-0.12876\Delta i-2082.86\Delta N-575675\Delta\mu+2082.29\Delta \Pi-29\ 9700\Delta\varphi-0.000060060=0$$
$$+1.33058\Delta\text{☊}-0\ 13724\Delta i-4428.60\Delta N-1232176\Delta\mu+4427.40\Delta \Pi-46.3460\Delta\varphi-0.000085520=0$$
$$+1\ 98900\Delta\text{☊}-0.06188\Delta i-7309.83\Delta N-2114904\Delta\mu+7307.67\Delta \Pi-42.6300\Delta\varphi-0\ 000066420=0$$

Коэффиціенты начальныхъ уравненій должны быть выражены въ одинакихъ единицахъ т. е. или въ секундахъ, или въ частяхъ радіуса; въ нашемъ случаѣ они, также какъ и постоянные члены, выражены въ частяхъ радіуса. (*) Окончательныя уравненія получатся изъ начальныхъ, если удовлетворимъ условію, что сумма $\Sigma\eta^2+\Sigma\vartheta^2$ должна имѣть наименьшую величину. По способу наименьшихъ квадратовъ коэффиціенты окончательныхъ уравненій будутъ составлены изъ суммъ квадратовъ и произведеній коэффиціентовъ начальныхъ уравненій; легко замѣтить, что, ограничивая по необходимости вычисленіе извѣстнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, мы не можемъ оставить полученныхъ коэффиціентовъ въ такомъ видѣ: иначе квадраты и произведенія малыхъ коэффиціентовъ совершенно исчезнутъ въ сравненіи съ большими и слѣдовательно вычисленіе не будетъ имѣть надлежащей точности; въ нашихъ

(*) Извѣстно, что переходъ отъ одной изъ этихъ единицъ къ другой производится помощію множителя 206264.8, который означаетъ число секундъ въ дугѣ, равной длинѣ радіуса. Логарифмъ этого числа есть 5.3144251 дополненіе его 4.6855749—10 есть $lg\sin 1''=lg\,1''$.

урр. напр. коэффиціенты при $\Delta\mu$ чрезвычайно велики въ сравненіи съ коэффиціентами Δi и съ постоянными членами. Этого неудобства можно избѣгнуть, измѣняя неизвѣстныя на слѣдующихъ основаніяхъ. Если въ начальныхъ уравненіяхъ (§§ 27 и 28) мы вмѣсто неизвѣстной x_n примемъ $\frac{x_n}{k}$ и въ тоже время умножимъ на k всѣ коэффиціенты при этой неизвѣстной, то, слѣдя за порядкомъ исключенія, мы увидимъ, что величины всѣхъ другихъ неизвѣстныхъ и вѣсовъ ихъ вовсе не перемѣнятся;, для поученія же x_n нужно будетъ результатъ исключенія умножить на k, а полученный вѣсъ раздѣлить на k^2. Введеніе множителя въ постоянный членъ не измѣняетъ вѣсовъ результатовъ, сами же результаты получаются умноженными на этого множителя. Распоряжаясь такимъ образомъ выборомъ множителей, мы легко можемъ всѣ коэффиціенты сдѣлать величинами не слишкомъ много различающимися между собою т. е величинами, такъ сказать, одного порядка. Такимъ образомъ въ нашемъ примѣрѣ коэффиціенты будутъ очень удобны для вычисленій, если положимъ

$$\Delta\eta = \tfrac{1}{2}\,\Delta i;\ \Delta n = 2000\ \Delta N;\ \Delta m = 1000000\ \Delta\mu;\ \Delta p = 2000\ \Delta \Pi;\ \Delta\theta = 10\ \Delta\varphi$$

и умножимъ постоянные члены на 10000. Отъ этихъ преобразованій начальныя уравненія примутъ такой видъ:

$$+1.24444\Delta\Omega - 0.29672\Delta\eta - 0.215400\Delta n - 0.072114\Delta m + 0.215195\Delta p + 0.74578\Delta\theta - 0.00097 = 0$$
$$+1.20920\Delta\Omega - 0.79730\Delta\eta - 0.361600\Delta n - 0.158704\Delta m + 0.361350\Delta p + 1.06770\Delta\theta + 0.91872 = 0$$
$$+0.83064\Delta\Omega - 1.21362\Delta\eta - 0.339108\Delta n - 0.166550\Delta m + 0.338930\Delta p + 1.05102\Delta\theta + 0.95110 = 0$$
$$+0.19790\Delta\Omega - 1.61606\Delta\eta + 0.025271\Delta n + 0.013117\Delta m - 0.024808\Delta p + 0.89356\Delta\theta + 1.33289 = 0$$
$$-0.92534\Delta\Omega - 2.63000\Delta\eta + 1.164400\Delta n + 0.622508\Delta m - 1.16430\text{[illegible]}\Delta p + 1.03950\Delta\theta + 3.01357 = 0$$
$$-2.24390\Delta\Omega - 1.58310\Delta\eta + 2.817143\Delta n + 1.557250\Delta m - 2.816687\Delta p + 0.22125\Delta\theta + 2.32794 = 0$$
$$-3.40574\Delta\Omega - 1.90056\Delta\eta + 4.448300\Delta n + 2.475336\Delta m - 4.447600\Delta p - 0.00174\Delta\theta + 2.49189 = 0$$
$$-0.74817\Delta\Omega - 0.05227\Delta\eta + 2.392555\Delta n + 1.384410\Delta m - 2.392390\Delta p - 1.86613\Delta\theta + 0.93710 = 0$$

$$-0.63775\Delta\Omega - 0.19614\Delta\eta + 0.147130\Delta n + 0.049258\Delta m - 0.146785\Delta p - 1.09570\Delta\theta + 0.00039 = 0$$
$$-0.63251\Delta\Omega - 0.50470\Delta\eta + 0.284656\Delta n + 0.124931\Delta m - 0.284329\Delta p - 1.41873\Delta\theta - 0.32292 = 0$$
$$-0.59156\Delta\Omega - 0.67558\Delta\eta + 0.394530\Delta n + 0.193604\Delta m - 0.394320\Delta p - 1.51007\Delta\theta + 0.21666 = 0$$
$$-0.57179\Delta\Omega - 0.72656\Delta\eta + 0.426266\Delta n + 0.221355\Delta m - 0.426100\Delta p - 1.69523\Delta\theta + 0.72402 = 0$$
$$-0.60804\Delta\Omega - 0.88884\Delta\eta + 0.350840\Delta n + 0.187568\Delta m - 0.350720\Delta p - 2.83980\Delta\theta + 0.76988 = 0$$
$$+0.55956\Delta\Omega - 0.25752\Delta\eta - 1.041430\Delta n - 0.575675\Delta m + 1.041143\Delta p - 2.99700\Delta\theta - 0.60060 = 0$$
$$+1.33058\Delta\Omega - 0.27448\Delta\eta - 2.214300\Delta n - 1.232176\Delta m + 2.213700\Delta p - 4.63460\Delta\theta - 0.85520 = 0$$
$$+1.98900\Delta\Omega - 0.12376\Delta\eta - 3.654916\Delta n - 2.1149\text{[illegible]}4\Delta m + 3.653835\Delta p - 4.26300\Delta\theta - 0.66422 = 0$$

§ 59.

При составленіи коэффиціентовъ окончательныхъ уравненій изъ суммъ квадратовъ и произведеній коэффиціентовъ начальныхъ уравненій можно найти средство повѣрять эти многосложныя вычисленія: для этого въ каждомъ уравненіи опредѣлимъ алгебраическую сумму коэффиціентовъ $S_i = A_i + B_i + \ldots + F_i$ и потомъ вмѣстѣ съ произведеніями ΣA_i^2, $\Sigma A_i B_i$, $\Sigma A_i C_i$

и пр. вычислимъ также $\Sigma A_i S_i$ и подобнымъ же образомъ $\Sigma B_i S_i$, $\Sigma C_i S_i \ldots$ и $\Sigma \omega_i S_i$, означая черезъ ω_i постоянные члены начальныхъ уравненій, тогда получимъ повѣрку всѣхъ коэффиціентовъ изъ равенствъ

$$\begin{array}{l} \Sigma A_i S_i = \Sigma A_i^2 + \Sigma A_i B_i + \ldots + \Sigma A_i F_i \\ \Sigma B_i S_i = \Sigma A_i B_i + \Sigma B_i^2 + \ldots + \Sigma B_i F_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma F_i S_i = \Sigma A_i F_i + \Sigma B_i F_i + \ldots + \Sigma F_i^2 \\ \Sigma \omega_i S_i = \Sigma A_i \omega_i + \Sigma B_i \omega_i + \ldots + \Sigma F_i \omega_i \end{array} \qquad (S)$$

Эти повѣрки должны удовлетворяться на столько, сколько можно требовать отъ сложныхъ вычисленій съ пятизначными логориѳмами; въ моихъ вычисленіяхъ напримѣръ получились при непосредственномъ опредѣленіи и изъ уравненій (S) слѣдующія величины.

$\Sigma A_i S_i$	$\Sigma B_i S_i$	$\Sigma C_i S_i$	$\Sigma D_i S_i$	$\Sigma E_i S_i$	$\Sigma F_i S_i$	$\Sigma \omega_i$
+ 12.0437;	+ 24.1187;	+ 1.2846;	+ 1.4994;	— 1.2842;	+ 79 9007;	— 13.6234
+ 12.0414	+ 24.1229	+ 1.2854	+ 1.5010	— 1.2867	+ 79.9011	— 13 6210

Согласіе между этими числами удовлетворительно, потому что разность почти вездѣ заключается въ пятомъ знакѣ. Въ большей части случаевъ для вычисленія коэффиціентовъ окончательныхъ уравненій достаточно бываетъ даже четырехзначныхъ логориѳмовъ и еще удобнѣе тогда употребляетъ таблицы квадратовъ чиселъ. Подобныя таблицы составлены Б. Я. Швейцеромъ для квадратовъ всѣхъ чиселъ отъ 0 до 1000: я пользовался ими для повѣрки первыхъ четырехъ цифръ (*). Эти же таблицы служатъ весьма удобно для вычисленія произведеній *по формулѣ:*

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2},$$

въ которой величины $(a+b)^2$, a^2 и b^2 получаются прямо изъ таблицъ по аргументамъ $a+b$, a и b.

Для нашего примѣра окончательныя уравненія таковы

$$\begin{array}{l} +29\ 6828\Delta\Omega + 10.8809\Delta\eta - 37.0835\Delta n - 20.5876\Delta m + 37.0737\Delta p - 7.9249\Delta\theta - 18.6377 = 0 \\ +10.8809\Delta\Omega + 20.0768\Delta\eta - 15.1109\Delta n - 8.3336\Delta m + 15.1068\Delta p + 1.5029\Delta\theta - 21.1584 = 0 \\ -37.0835\Delta\Omega - 15.1109\Delta\eta + 55.0054\Delta n + 30.9020\Delta m - 54.9924\Delta p + 22.5648\Delta\theta + 28.2922 = 0 \\ -20.5876\Delta\Omega - 8\ 3336\Delta\eta + 30.9020\Delta n + 17.3771\Delta m - 30.8949\Delta p + 13.0380\Delta\theta + 15.7909 = 0 \\ +37.0737\Delta\Omega + 15.1068\Delta\eta - 54.9924\Delta n - 30.8949\Delta m + 54.9796\Delta p - 22.5595\Delta\theta - 28.2855 = 0 \\ -7.9249\Delta\Omega + 1.5029\Delta\eta + 22.5648\Delta n + 13.0380\Delta m - 22.5595\Delta p + 73.2798\Delta\theta + 10.3776 = 0 \end{array}$$

§ 60.

Исключеніе неизвѣстныхъ изъ этихъ уравненій чрезвычайно трудно произвести посредствомъ простыхъ умноженій; при вычисленіи помощію логориѳмовъ нужно употреблять

(*) Эти таблицы будутъ помѣщены при нѣмецкомъ переводѣ сочиненія Савича «*Приложеніе Теоріи Вѣр. къ вычисл. набл. и геод. изм.*» издаваемомъ Лайсомъ (Lais).

семизначныя таблицы, потому что при шести послѣдовательныхъ исключеніяхъ входитъ очень большое число сочетаній между коэффиціентами и они осложняются по мѣрѣ приближенія къ концу. Чтобы вмѣстѣ съ величинами неизвѣстныхъ получить вѣсы ихъ, а также имѣть возможность повѣрить результаты, Энке совѣтуетъ сдѣлать всегда два раза полное исключеніе въ противоположномъ порядкѣ неизвѣстныхъ; послѣ этого всѣ результаты будутъ повѣрены и легко можно будетъ вычислить вѣсы всѣхъ 6 неизвѣстныхъ. Самое вычисленіе всего удобнѣе расположить въ такомъ порядкѣ (*): называя вообще черезъ ΣA_i^2 коэффиціентъ перваго исключаемаго неизвѣстнаго въ первомъ уравненіи, черезъ ΣB_i^2 коэффиціентъ слѣдующаго за нимъ во второмъ уравненіи и т. д.; уравненія всегда можно представить въ видѣ

$$x\,\Sigma A_i^2 + y\,\Sigma A_iB_i + z\Sigma A_iC_i + u\Sigma A_iD_i + w\Sigma A_iE_i + t\Sigma A_iF_i + \Sigma A_i\omega_i = 0$$
$$x\,\Sigma A_iB_i + y\,\Sigma B_i^2 + z\Sigma B_iC_i + u\Sigma B_iD_i + w\Sigma B_iE_i + t\Sigma B_iF_i + \Sigma B_i\omega_i = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x\,\Sigma A_iF_i + y\,\Sigma B_iF_i + z\Sigma C_iF_i + u\Sigma D_iF_i + w\Sigma E_iF_i + t\Sigma F_i^2 + \Sigma F_i\omega_i = 0$$

тогда, написавъ рядъ коэффиціентовъ

1) $\Sigma A_i^2 \quad \Sigma A_iB_i \quad \Sigma A_iC_i \quad \Sigma A_iD_i \quad \Sigma A_iE_i \quad \Sigma A_iF_i \quad \Sigma A_iS_i \quad \Sigma A_i\omega_i$

и

2) $lg\,\Sigma A_i^2 \quad lg\,\Sigma A_iB_i \quad lg\,\Sigma A_iC_i \quad lg\,\Sigma A_iD_i \quad lg\,\Sigma A_iE_i \quad lg\,\Sigma A_iF_i \quad lg\,\Sigma A_iS_i \quad lg\,\Sigma A_i\omega_i$

вычислимъ $lg\,\dfrac{\Sigma A_iB_i}{\Sigma A_i^2}$; прикладывая это число ко всѣмъ членамъ ряда (2) начиная со втораго и пріискивая соотвѣтствующія числа, подпишемъ ихъ почленно подъ рядомъ

3) $\Sigma B_i^2 \quad \Sigma B_iC_i \quad \Sigma B_iD_i \quad \Sigma B_iE_i \quad \Sigma B_iF_i \quad \Sigma B_iS_i \quad \Sigma B_i\omega_i$

т. е. 4) $\dfrac{(\Sigma A_iB_i)^2}{\Sigma A_i^2} \quad \dfrac{\Sigma A_iB_i\Sigma A_iC_i}{\Sigma A_i^2} \quad \dfrac{\Sigma A_iB_i\Sigma A_iD_i}{\Sigma A_i^2} \quad \dfrac{\Sigma A_iB_i\Sigma A_iE_i}{\Sigma A_i^2} \quad \dfrac{\Sigma A_iB_i\Sigma A_iF_i}{\Sigma A_i^2} \quad \dfrac{\Sigma A_iB_i\Sigma A_iS_i}{\Sigma A_i^2} \quad \dfrac{\Sigma A_iB_i\Sigma A_i\omega_i}{\Sigma A_i^2}$

и вычтемъ (4) изъ (3), тогда получатся коэффиціенты, которыя мы назовемъ черезъ

5) $\Sigma B_{i,1}^2 \quad \Sigma B_{i,1}C_{i,1} \ldots\ldots\ldots\ldots$

6) $lg\,\Sigma B_{i,1}^2 \quad lg\,\Sigma B_{i,1}C_{i,1} \ldots\ldots\ldots\ldots$

значеніе этихъ коэффиціентовъ и пр. легко видѣть изъ § 28.

Далѣе пишемъ

7) $\Sigma C_i^2 \quad \Sigma C_iD_i \ldots\ldots\ldots$

и подъ нимъ

8) $\dfrac{(\Sigma A_iC_i)^2}{\Sigma A_i^2} \quad \dfrac{\Sigma A_iC_i\Sigma A_iD_i}{\Sigma A_i^2} \ldots\ldots\ldots$

разность которыхъ даетъ

9) $\Sigma C_{i,1}^2 \quad \Sigma C_{i,1}D_{i,1} \ldots\ldots\ldots$

подъ этимъ рядомъ

(*) Болѣе подробное изложеніе всѣхъ практическихъ пріемовъ читатели найдутъ въ послѣдней статьѣ Энке: *«Berl. Astronomisch. Jahrbuch 1836»*.

10) $\frac{(\Sigma B_{i,1} C_{i,1})^2}{\Sigma B_{i,1}^2}$ $\frac{\Sigma B_{i,1} C_{i,1} \Sigma B_{i,1} D_{i,1}}{\Sigma B_{i,1}^2}$ . . . .

изъ разности которыхъ получимъ

11) $\Sigma C_{i,2}^2$ $\Sigma C_{i,2} D_{i,2}$. . . . .

12) $lg\, \Sigma C_{i,2}$ $lg\, \Sigma C_{i,2} D_{i,2}$ . . . .

13) ΣD_i^2. . . . .

14) $\frac{(\Sigma A_i D_i)^2}{\Sigma A_i^2}$ . . . , ...

подвигаясь такимъ образомъ далѣе и далѣе вправо, дойдемъ наконецъ до

$\Sigma F_{i,5}^2$ $\Sigma F_{i,5}\, S_{i,5}$, $\Sigma F_{i,5}\omega_i^{(5)}$

и отсюда найдемъ $t = \frac{\Sigma F_{i,5}\omega_i^{(5)}}{\Sigma F_{i,5}^2}$ съ вѣсомъ $\Sigma F_{i,5}^2$

Вертикальный рядъ содержащій S служитъ для постепенной повѣрки вычисленій на основаніи равенствъ:

$$\Sigma B_{i,1} S_{i,1} = \Sigma B_{i,1}^2 + \Sigma B_{i,1} C_{i,1} + \Sigma B_{i,1} D_{i,1} + \Sigma B_{i,1} E_{i,1} + \Sigma B_{i,1} F_{i,1}$$

и точно тоже для $C, D, E.. F$.

$$\Sigma C_{i,2} S_{i,2} = \Sigma C_{i,2}^2 + \Sigma C_{i,2} D_{i,2} + \Sigma C_{i,2} E_{i,2} + \Sigma C_{i,2} F_{i,2}$$

и также для D, E и F.

$$\Sigma D_{i,3} S_{i,3} = \Sigma D_{i,3}^2 + \Sigma D_{i,3} E_{i,3} + \Sigma D_{i,3} F_{i,3}$$

и т. д. Наконецъ

$\Sigma F_{i,5} S_{i,5}$ должна быть равна $\Sigma F_{i,5}^2$.

Если продолжимъ порядокъ вычисленія, то получимъ при помощи множителей $\frac{\Sigma A_i\omega_i}{\Sigma A_i^2}$, $\frac{\Sigma B_{i,1}\omega_i^{(1)}}{\Sigma B_{i,1}^2}$ и пр. количества

	$\Sigma S_i \omega_i$	$\Sigma \omega_i^2$
	$\Sigma S_{i,1} \omega_{i,1}$ и	$\Sigma \omega_i^{(1)2}$
потомъ	$\Sigma S_{i,2} \omega_{i,2}$ и	$\Sigma \omega_i^{(2)2}$
и т. д.		. . . . .
и наконецъ	0 и	$\Sigma \omega_i^{(6)2}$

Первый изъ этихъ вертикальныхъ рядовъ служитъ для повѣрки суммъ содержащихъ ω включительно до $\Sigma F_{i,5}\omega_i^{(5)}$, на основаніи равенствъ: $\Sigma S_{i,1}\omega_i^{(1)} = \Sigma A_{i,1}\omega_i^{(1)} + \Sigma B_{i,1}\omega_i^{(1)} + \ldots + \Sigma F_{i,1}\omega_i^{(1)}$ и пр. сумма $\Sigma \omega_{i,6}^2$ должна быть равна суммѣ квадратовъ погрѣшностей начальныхъ уравненій, когда въ нихъ вставимъ полученные изъ окончательныхъ уравненій величины неизвѣстныхъ, какъ это было объяснено въ концѣ § 29.

§ 61.

Если при исключеніи (§ 28) остановимся на двухъ уравненіяхъ съ двумя неизвѣстными, которыя будутъ вида

$$\xi_{n-1}\,\Sigma p_{i,n-1}^{\;2}+\xi_n\,\Sigma p_{i,n-1}p_{i,n}-\Sigma p_{i,n-1}\omega_i^{(n-1)}=0$$
$$\xi_{n-1}\,\Sigma p_{i,n-1}\,p_{i,n}+\xi_n\,\Sigma p_{i,n}^{\;2}-\Sigma p_{i,n}\omega_i^{(n-1)}=0$$

исключимъ изъ нихъ вмѣсто ξ_{n-1} неизвѣстную ξ_n, опредѣляя ее изъ послѣдняго уравненія, то выдетъ

$$\left[\Sigma p_{i,n-1}^{\;2}-\frac{(\Sigma p_{i,n}p_{i,n-1})^2}{\Sigma p_{i,n}^{\;2}}\right]\xi_{n-1}-\left[\Sigma p_{i,n-1}\,\omega_i^{(n-1)}-\frac{\Sigma p_{i,n}p_{i,n-1}\,\Sigma p_{i,n}\omega_i^{(n-1)}}{\Sigma p_{i,n}^{\;2}}\right]=0$$

и коэффиціентъ при ξ_{n-1} будетъ вѣсъ величины ξ_{n-1}. Означимъ вѣсъ вообще ξ_k черезъ $P(\xi_k)$, тогда

$$P(\xi_{n-1})=\Sigma p_{i,n-1}^{\;2}-\frac{(\Sigma p_{i,n-1}p_{i,n})^2}{\Sigma p_{i,n}^{\;2}}$$

$$\text{и}\;\; P(\xi_n)=\Sigma q_{i,n}^{\;2}=\Sigma p_{i,n}^{\;2}-\frac{(\Sigma p_{i,n-1}p_{i,n})^2}{\Sigma p_{i,n-1}^{\;2}}$$

отсюда легко замѣтимъ, что

$$P(\xi_{n-1})=P(\xi_n)\,.\,\frac{(\Sigma p_{i,n-1})^2}{\Sigma p_{i,n}^{\;2}}$$

или въ нашемъ случаѣ

$$P(w)=P(t)\,.\,\frac{\Sigma E_{i,4}^{\;2}}{\Sigma F_{i,4}^{\;2}}.$$

Такимъ образомъ извѣстенъ будетъ вѣсъ величины w, которая, также какъ и всѣ другія, получится помощію простой подстановки: именно изъ уравненій

$$w+\frac{t\,\Sigma E_{i,4}\,F_{i,4}+\Sigma E_{i,4}\,\omega_i^{(4)}}{\Sigma E_{i,4}^{\;2}}=0$$

$$u+\frac{w\Sigma\,D_{i,3}\,E_{i,3}+t\,\Sigma D_{i,3}\,F_{i,3}+\Sigma D_{i,3}\,\omega_i^{(3)}}{\Sigma D_{i,3}^{\;2}}=0 \text{ и т. д.}$$

Возвращаясь въ исключеніи § 28 къ тремъ уравненіямъ съ тремя неизвѣстными и измѣняя порядокъ исключаемыхъ неизвѣстныхъ найдемъ, что вѣсъ величины u будетъ

$$P(u)=\Sigma D_{i,3}^{\;2}\,.\,\frac{\Sigma E_{i,4}^{\;2}\,.\,\Sigma F_{i,3}^{\;2}}{K.\,\Sigma E_{i,3}^{\;2}}\,,$$

$$\text{гдѣ}\quad K=\Sigma F_{i,3}^{\;2}-\frac{(\Sigma E_{i,3}\,F_{i,3})^2}{\Sigma E_{i,3}^{\;2}}$$

такой способъ опредѣлять вѣсы можно бы обобщить и примѣнить ко всѣмъ неизвѣстнымъ, но выраженія вѣсовъ получаются болѣе и болѣе сложными; для 6 неизвѣстныхъ достаточно опредѣлить вѣсы трехъ послѣднихъ неизвѣстныхъ изъ выраженій $P(t)$, $P(w)$ и $P(u)$; потомъ произведя исключеніе снова въ обратномъ порядкѣ неизвѣстныхъ, подобнымъ же образомъ найдемъ вѣсы $P(x)$, $P(y)$ и $P(z)$ и сверхъ того получимъ по два раза величины всѣхъ неизвѣстныхъ; согласіе ихъ служитъ повѣркою исчисленій.

§ 62.

Обращаясь къ нашимъ окончательнымъ уравненіямъ, сдѣлаемъ одно важное въ практическомъ отношеніи замѣчаніе. По смыслу задачи неизвѣстныя величины независимы между собою, слѣдовательно въ рѣшеніи уравненій не можетъ быть, говоря строго, никакой неопредѣленности. Исключеніе неизвѣстныхъ изъ линейныхъ уравненій будетъ очевидно невозможно въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты при двухъ неизвѣстныхъ во всѣхъ уравненіяхъ равны или пропорціональны, потому что тогда можно соединить эти двѣ неизвѣстныя подъ одну вида $x+y$ или $x+ny$ и отдѣленіе x и y совершенно невозможно. Чтобы подобная неопредѣленность обнаружилась при вычисленіяхъ приблизительныхъ достаточно, если коэффиціенты только приближаются къ равенству, или пропорціональности Мы имѣемъ подобный случай въ нашемъ примѣрѣ; именно коэффиціенты при Δn и Δp, т. е. при ΔN и $\Delta \Pi$ очень мало различаются между собою; вслѣдствіе этого два изъ окончательныхъ уравненій почти тождественны. Легко найти причину этого обстоятельства: коэффиціенты при $\Delta \Pi$ и ΔN въ теоріи эллиптическаго движенія вычисляются по формуламъ

$$\left[1-\frac{a^2 cs\varphi_1}{r^2}\right]\left(\frac{d\lambda}{du}\right)-a\,tg\varphi_1 .\, snv\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)$$

$$a\,tg\varphi_1\, snv\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)+\frac{a^2 cs\varphi_1}{r^2}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)$$

и подобнымъ же относительно широты β. Въ этихъ формулахъ a означаетъ большую полуось кометной орбиты, которая значительно больше единицы и радіусовъ векторовъ r вблизи перихелія, слѣдовательно выраженія коэффиціентовъ должны быть почти равны и съ обратными знаками; понятно что такое обстоятельство встрѣтится при всякой значительно удлиненной орбитѣ. Неудобство близкихъ къ равенству коэффиціентовъ состоитъ въ томъ, что величины Δp и Δn полученные изъ различныхъ исключеній могутъ выходить совершенно несходными; впрочемъ мы можемъ получить довольно благонадежныя величины этихъ неизвѣстныхъ, исключивъ ихъ прежде другихъ неизвѣстныхъ; потому что при этомъ коэффиціенты ихъ сочетаются еще съ точными величинами прочихъ коэффиціентовъ.

§ 63.

Чтобы дать понятіе о степени согласія результатовъ при различныхъ исключеніяхъ я помѣщу здѣсь результаты, сдѣланныхъ мною 4-хъ исключеній, въ которыхъ всѣ повѣрки удовлетворялись почти вполнѣ:

Поряд. исключ. неизв.	$lg\,\Delta☊$	$lg\,\Delta\eta$	$lg\,\Delta m$	$lg\,\Delta\theta$	$lg\,\Delta p$	$lg\,\Delta n$
$\Delta☊, \Delta\eta, \Delta n, \Delta m, \Delta p, \Delta\theta$	9.7432792*n*(*)	9.9103501	0.9211999	8.7971472*n*	0.29456	0.52560*n*
$\Delta\eta, \Delta m, \Delta☊, \Delta\theta, \Delta p, \Delta n$	9.7455133*n*	9.9102405	0.92671	8.8048183*n*	0.81051	0.03227
$\Delta\theta, \Delta p, \Delta m, \Delta n, \Delta\eta, \Delta☊$	9.7490775*n*	9.9098387	0.9299113	8.7969087*n*	0.90143	0.40535
$\Delta n, \Delta p, \Delta\theta, \Delta☊, \Delta m, \Delta\eta$	9,7501637*n*	9.9096238	0.9312869	8.7966778*n*	0.91249	0.43655

Для вѣсовъ получились слѣдующія величины:

$P(\Delta☊) = 0.681$ $\qquad$ $P(\Delta\theta) = 47.84$

$P(\Delta\eta) = 10.566$ $\qquad$ $P(\Delta p) = 0.0001524$

$P(\Delta m) = 0.0017778$ $\qquad$ $P(\Delta n) = 0.0001963$

Двѣ послѣднія системы неизвѣстныхъ болѣе надежны для опредѣленія Δn и Δp; принимая среднія выводы изъ нихъ за величины неизвѣстныхъ, получимъ

$$lg\,\Delta☊ = 9.74962\,n$$
$$lg\,\Delta\eta = 9.90968$$
$$lg\,\Delta n = 0.42095$$
$$lg\,\Delta m = 0.93060$$
$$lg\,\Delta p = 0.90696$$
$$lg\,\Delta\theta = 8.79679\,n$$

Отсюда, пользуясь замѣчаніемъ сдѣланнымъ въ § 58, найдемъ:

$\Delta☊ = -11''.59;$	$P(\Delta☊) = 0.681$
$\Delta i = +33\ .51;$	$P(\Delta i) = 2.6415$
$\Delta N = +0\ .03;$	$P(\Delta N) = 785.24$
$\Delta\mu = +0\ .0001758;$	$P(\Delta\mu) = 1777800000$
$\Delta\Pi = +0\ .08;$	$P(\Delta\Pi) = 609.72$
$\Delta\varphi = -0\ .13;$	$P(\Delta\varphi) = 4784$

§ 64.

Найденные вѣсы результатовъ достаточны для того, чтобы судить объ относительной благонадежности поправокъ; но для того, чтобы видѣть ясно, какъ велики могутъ быть погрѣшности исправленныхъ элементовъ, мы должны еще опредѣлить ихъ вѣроятныя погрѣшности. Для этой цѣли необходимо знать степень точности самыхъ наблюденій, т. е. среднюю ихъ ошибку. На основаніи сказаннаго въ § 35 мы можемъ весьма точно опредѣлить среднюю ошибку наблюденій a posteriori по формулѣ

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma E_i^2}{\Sigma p_i - n}}$$

(*) Значекъ *n* при логариѳмѣ означаетъ, что логариѳмъ принадлежитъ отрицательному числу. Мы пишемъ здѣсь характеристики 8 и 9, подразумѣвая, что изъ нихъ должно вычитать 10.

которая въ нашемъ случаѣ даетъ

$$m=\sqrt{\frac{\Sigma E_i^2}{34}}$$

Погрѣшности E_i суть тѣ величины, въ которыя обращаются начальныя уравненія отъ подстановки найденныхъ величинъ поправокъ. Сумма ΣE_i^2 можетъ быть вычислена чрезъ непосредственную подстановку и еще въ видѣ $\Sigma\omega_i^{(6)2}$, какъ показано въ § 60. Въ этомъ послѣднемъ видѣ получается ΣE_i^2, когда мы въ $\Sigma\varepsilon_i^2$ подставимъ на мѣсто погрѣшностей ε_i линейныя выраженія ихъ и приведемъ эту сумму къ виду § 29. Произведя на самомъ дѣлѣ эту подстановку, мы безъ труда найдемъ равенство

$$\Sigma E_i^2=\Sigma\omega_i^2-\frac{(\Sigma a_{i,1}\omega_i^{(1)})^2}{\Sigma a_{i,1}^2}-\frac{(\Sigma b_{i,2}\omega_i^{(2)})^2}{\Sigma b_{i,2}^2}-\frac{(\Sigma b_{i,3}\omega_i^{(3)})^2}{\Sigma c_{i,3}^2}-\ldots-\frac{(\Sigma q_{i,n}\omega_i^{(n)})^2}{\Sigma q_{i,n}^2}$$

и если, согласно съ принятымъ обозначеніемъ, положимъ сперва

$$\Sigma\omega_i^2-\frac{(\Sigma a_{i,1}\omega_i^{(1)})^2}{\Sigma a_{i,1}^2}=\Sigma\omega_i^{(2)2}$$

потомъ

$$\Sigma\omega_i^{(1)2}-\frac{(\Sigma b_{i,2}\omega_i^{(2)})^2}{\Sigma b_{i,2}^2}=\Sigma\omega_i^{(3)2}$$

и т. д.

то получимъ наконецъ (§ 29)

$$\Sigma E_i^2=\Sigma\omega_i^{(n)2}$$

что обращается для шести неизвѣстныхъ въ

$$\Sigma E_i^2=\Sigma\omega_i^{(6)2}$$

При четырехъ исключеніяхъ получились для $\Sigma\omega_i^{(6)2}$ слѣдующія величины: 1,44078: 1,42925; 1,42337 и 1.42868. При подстановкѣ поправокъ въ начальныя уравненія получилось восемь положительныхъ величинъ для E и восемь же отрицательныхъ; по величинѣ отрицательныя имѣли незначительный перевѣсъ; сумма квадратовъ вышла равна 1,44380, что довольно согласно съ найденными величинами $\Sigma\omega_i^{(6)2}$. Принявъ $\Sigma E_i^2=1,44380$ и уничтоживъ постояннаго множителя введеннаго при составленіи уравненій, получимъ по обращеніи линейныхъ мѣръ въ секунды

$$m=4''.2501$$

Вѣроятная погрѣшность наблюденій найдется изъ равенства

$$r=0,67443\,m$$

и будетъ

$$r=2''.8667.\ (*)$$

(*) Если среднюю ошибку вычислимъ по формулѣ

$$m=\sqrt{\frac{\Sigma E_i^2}{\Sigma p_i}},$$

то для вѣроятной погрѣшности выходитъ величина 2''.64; при вычисленіи же помощію первыхъ степеней погрѣшностей получается 2''.03.

Наконецъ по формулѣ (§ 51)

$$r_k = \gamma' \sqrt{2} \frac{m}{\sqrt{P_k}}$$

подставляя въ ней $\gamma'_6 = 1.63525$, найдемъ по даннымъ величинамъ m и P_k вѣроятныя погрѣшности результатовъ; множитель $\gamma'_6\, m \sqrt{2}$ равенъ 9.8287; слѣд.

$$r_k = \frac{9.8287}{\sqrt{P_k}}$$

Введемъ теперь поправки $\Delta ☊$, Δi и пр. въ приближенные элементы $☊_0, i_0 \ldots$; исправленные элементы съ ихъ вѣроятными погрѣшностями будутъ:

Элементы ☌	Вѣроятн. погр.	Вѣроятн. погр. по прежн. способу
☊ = 165° 18′ 48″. 40	11″. 913	3″. 474
i = 116 58 3 . 89	6 . 047	1 . 764
N = 294 16 46 . 33	0 . 347	0 . 102
Π = 294 25 39 . 95	0 . 398	0 . 116
φ = 84 56 47 . 14	0 . 142	0 . 041
μ = 1″.9548408	0.″0002331	0″.00006799

Въ послѣдней графѣ помѣщены здѣсь для сравненія величины, которыя принимались за вѣроятныя погрѣшности по прежнему способу ихъ опредѣленія.

Изъ этихъ элементовъ выходитъ:

		Разность отъ прибл. вел.
Эксцентрицитетъ	0.9961127	0.0000000
Большая полуось	148 79789	— 0.00886 ср. разст. ♁ отъ ☉
Малая полуось	13.107181	— 0.000694 — —
Время полнаго обращ.	1815.08	— 0.16 зв. года.
Время прох. чрезъ перих.	29 Сент. $23^h22^m3^s.36$ Ср Гр вр.	+ 0.01054 ср. сут.

ПОЛОЖЕНІЯ.

1.

Средніе выводы заслуживаютъ довѣрія только при значительномъ числѣ наблюденій.

2.

Гауссовы теоріи способа наименьшихъ квадратовъ основаны на положеніяхъ недоказанныхъ и не достаточно убѣдительныхъ.

3.

Случайная погрѣшность наблюденій не зависитъ отъ величины измѣряемаго количества.

4.

Переходъ отъ правила ариѳметической среды къ способу наименьшихъ квадратовъ не требуетъ высшихъ исчисленій.

5.

Обыкновенный способъ опредѣленія вѣроятныхъ погрѣшностей результатовъ безошибоченъ только въ случаѣ одной неизвѣстной величины

6.

Въ теоретическомъ отношеніи способъ наименьшихъ квадратовъ не есть безусловно самый выгодный.